

verdade para proposições em que ocorram descrições vazias, como a expressa pela frase «O actual rei de França» em proposições como a expressa pela frase «O actual rei de França é pálido». Uma fórmula na qual ocorre uma descrição representa uma asserção falsa quando as condições estipuladas pelas fórmulas de univocidade não são satisfeitas.

A interpretação da fórmula $B(\iota_x Fx)$ não é uma definição explícita da descrição $\iota_x Fx$, uma vez que não há para este símbolo uma expressão definidora, mas antes uma especificação semântica para as fórmulas em que a descrição ocorre na posição de termo, como uma parte constituinte da fórmula. Se existe uma derivação das fórmulas de univocidade de Fa então o símbolo $\iota_x Fx$, é um termo, justamente o termo que representa o objecto único que satisfaz Fa .

O operador iota de Russell é regulado pelo que podemos chamar a regra iota com o seguinte conteúdo: se as fórmulas de univocidade para Fa foram derivadas, então a descrição $\iota_x Fx$, é um termo e a fórmula $F(\iota_x Fx)$ pode agora ser derivada por meio do esquema seguinte:

$$\frac{\exists x Fx \quad \forall x \forall y ((Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y)}{\therefore F \iota_x Fx}$$

A regra da redenominação de variáveis ligadas para os quantificadores é aplicável à variável ligada pelo operador iota. Mas a colisão entre variáveis ligadas, que é necessário impedir quando se usam quantificadores, tem também que ser impedida na utilização do operador iota. *Ver também* OPERADOR, QUANTIFICADOR, VARIÁVEL. MSL

teoria dos conjuntos A criação da teoria dos conjuntos é obra do matemático Georg Cantor e nasceu da tentativa de solucionar um problema técnico de matemática na teoria das séries trigonométricas. Essa tentativa levou Cantor a introduzir a noção de ORDINAL e, mais tarde, a de CARDINAL. Cantor demonstrou teoremas de grande alcance, notavelmente o seu célebre teorema (*ver* TEOREMA DE CANTOR). Cantor

lidava intuitivamente com os conjuntos, tomando-os como agregados arbitrários de elementos (ainda que juntos dum modo intuitivamente artificial) que tanto podiam ser em número finito como infinito. Cada conjunto constituía um objecto único, bem determinado pelos seus elementos (*ver* AXIOMA DA EXTENSIONALIDADE) e do mesmo género dos seus constituintes (um conjunto pode, por sua vez, ser um elemento de outro conjunto). O desenvolvimento da noção de conjunto veio a revelar-se de tal maleabilidade e eficácia que acomodou as construções matemáticas então conhecidas e, inclusivamente, providenciou novas construções. Estes feitos vieram naturalmente ao encontro duma clarificação conceptual da matemática, já em curso com, por exemplo, a substituição da noção problemática de infinitesimal pela noção rigorosa de limite devida a Karl Weierstrass. Finalmente, mas não menos importante, a teoria dos conjuntos providenciou um enquadramento para a unificação das várias disciplinas da matemática (álgebra, geometria, análise, etc.). A maleabilidade das construções da teoria dos conjuntos, o seu contributo para a clarificação conceptual e para a unificação da matemática e, por fim, a teoria do infinito de Cantor (hoje amplamente aceite, ou pelo menos admirada) contribuíram para a progressiva aceitação da teoria dos conjuntos.

A principal maneira de formar um conjunto é através de uma propriedade: esta individual como conjunto o agregado das entidades que a têm. É o chamado PRINCÍPIO DA ABSTRAÇÃO. Na viragem para o séc. XX, descobriu-se que o uso irrestrito deste princípio origina paradoxos, como é o caso do PARADOXO DE RUSSELL, do paradoxo de Cantor, ou do paradoxo de Burali-Forti. O aparecimento destes paradoxos põe fim a uma fase ingénuo do desenvolvimento da teoria dos conjuntos e dá início a uma busca dos princípios consistentes que subjazem à formação dos conjuntos.

As duas primeiras tentativas sistemáticas de axiomatização da teoria dos conjuntos devem-se a Russell e a Zermelo. A tentativa de Russell baseia-se na suposição de que os paradoxos são

teoria dos conjuntos

fruto de violações do PRINCÍPIO DO CÍRCULO VICIOSO e que, para as evitar, é mister distinguir-se numa forma sistemática vários tipos lógicos (ver TEORIA DOS TIPOS). Deve, no entanto, apontar-se que a teoria dos tipos de Russell não é, literalmente, uma teoria dos conjuntos: é antes uma teoria lógica de FUNÇÕES PROPOSICIONAIS. A ideia da teoria de Zermelo é totalmente diferente: é a de que os paradoxos surgem porque se admitem agregados demasiado grandes (uma ideia similar também ocorreu a Russell em 1906). Modernamente, a teoria de Zermelo formula-se na linguagem do CÁLCULO DE PREDICADOS com igualdade munida de um símbolo relacional binário não lógico \in (o símbolo de pertença), cuja interpretação intuitiva é «ser elemento de». A teoria de Zermelo-Fraenkel (ZF) é hoje amplamente aceite pelos especialistas da teoria dos conjuntos. Antes de passar a descrever com um certo pormenor esta teoria (e outras a ela associadas), queremos brevemente mencionar a existência de mais quatro teorias dos conjuntos. Duas delas, NBG e MK, são extensões de ZF especialmente fabricadas para admitir colecções grandes — as CLASSES. As outras duas, devidas a Quine, não são extensões de ZF e, na raiz, baseiam-se ainda na intuição original de Russell no que diz respeito ao papel do princípio do círculo vicioso. Sobre estas duas últimas teorias, NF e ML (ver *NEW FOUNDATIONS*), aplica-se exemplarmente o seguinte comentário de Russell: «nem o mais inteligente dos lógicos teria pensado nelas se não soubesse das contradições».

A pedra de toque da axiomática de Zermelo de 1908 é o axioma de separação (*Aussouderungaxiom*). Este axioma é, na formulação moderna, um axioma-esquema, $\forall w \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (\pi x \wedge x \in w))$, onde πx é uma fórmula da linguagem na qual a variável y não ocorre livre. Este esquema de axiomas (um para cada fórmula π) diz-nos que dado um conjunto w e uma fórmula π , é possível separar os elementos de w em dois conjuntos — no conjunto dos elementos de w que satisfazem π e no conjunto dos elementos de w que não satisfazem π (esta última parte obtém-se da formulação anterior

com a fórmula $\neg\pi$ em vez de π). Ao contrário do princípio da abstracção que leva a contradições, o *Aussouderungaxiom* evita as contradições conhecidas ao limitar *a priori* por um conjunto dado w o tamanho do conjunto y a formar. É claro que o axioma da separação só é eficaz se houver muitos destes conjuntos w para começar, ou seja, só temos realmente uma teoria dos conjuntos digna desse nome se assegurarmos a existência dum suprimento razoável de conjuntos à partida. É esse o papel dos chamados axiomas de existência de ZF. São eles os seguintes:

3. Axioma dos Pares: $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$;
4. Axioma da União: $\forall x \exists y \forall z (\exists w (w \in x \wedge z \in w) \rightarrow z \in y)$;
5. Axioma das Partes: $\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$;
6. Axioma do Infinito: $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$.

Os axiomas 1 e 2, conspícuos pela sua ausência, são respectivamente o axioma de extensionalidade e o *Aussouderungaxiom*. Em alguns desenvolvimentos formais também se considera um axioma 0, de existência de conjuntos: o axioma $\exists x (x = x)$. Não obstante, este axioma é consequência de formulações usuais do cálculo de predicados com igualdade e, por isso, omitimo-lo. A leitura dos axiomas 3, 4, e 5 é simples: eles permitem-nos, respectivamente, formar (com a ajuda do axioma da separação) os conjuntos $\{x, y\}$, $\cup x$ e $P(x)$. O AXIOMA DO INFINITO permite-nos formar o conjunto ω dos números naturais.

Em 1922 e independentemente, Thoralf Skolem e Abraham Fraenkel propuseram um novo axioma-esquema, denominado «axioma-esquema da substituição». Dada uma fórmula $\phi(x, y)$ da linguagem da teoria dos conjuntos e um conjunto w , dizemos que a fórmula $\phi(x, y)$ tem carácter funcional em w se, para qualquer elemento $x \in w$, existir um e um só elemento y tal que $\phi(x, y)$ vale. O axioma da substituição diz-nos que, neste caso, podemos constituir como conjunto a colecção dos elementos y para os quais existe $x \in w$ tal que $\phi(x, y)$ vale. Simbo-

licamente, para cada fórmula $\phi(x, y)$ da linguagem da teoria dos conjuntos, tem-se o seguinte:

2'. Axioma da Substituição: $\forall x \exists! y \Phi(x, y) \rightarrow \forall w \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in w \wedge \Phi(x, y)))$

Tanto Skolem como Fraenkel observaram que, sem este axioma, não se pode demonstrar a existência dum conjunto de cardinalidade \aleph_ω . Mais tarde, von Neumann (1928) desenvolveu a teoria dos ordinais usando a saciedade o axioma da substituição (sem este axioma não é possível construir o ordinal von Neumann $\omega + \omega$, nem é possível mostrar que toda a BOA ORDEM é isomorfa a um ordinal von Neumann). Finalmente, na presença do axioma da substituição, o *Aussouderungaxiom* é redundante (isto não acontece com certas formulações alternativas do axioma da substituição).

A axiomática da teoria dos conjuntos ZF (de Zermelo-Fraenkel) consiste nos axiomas 1, 2', 3, 4, 5, 6 e no seguinte axioma 7, denominado de AXIOMA DA FUNDAÇÃO (*Fundierungsaxiom*): $\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$.

Este axioma aparece num trabalho de Zermelo de 1930 e baseia-se em ideias anteriores de von Neumann (1928) e Mirimanoff (1917). O axioma da fundação espelha fielmente a concepção iterativa dos conjuntos (ou concepção cumulativa dos conjuntos, se quisermos utilizar uma metáfora espacial ao invés duma temporal). De acordo com esta concepção, um conjunto é uma coleção que aparece nalguma das seguintes etapas. A etapa 0 é formada pelo conjunto dos átomos ou PROTO-ELEMENTOS (*Urelemente*) e a etapa 1 contém os proto-elementos (as etapas acumulam) e todos os conjuntos de proto-elementos. Por exemplo, se houver dois proto-elementos a e b , a etapa 0 é o conjunto $\{a, b\}$ e a etapa 1 é o conjunto $\{a, b, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Se não houver proto-elementos, a etapa 0 reduz-se ao conjunto vazio e a etapa 1 ao conjunto $\{\emptyset\}$. A etapa 2 é constituída pelos elementos da etapa 1 e por todos os conjuntos formados com estes elementos. E assim sucessivamente. Para cada número natural temos definido um conjunto

E_n das entidades formadas até à etapa n . A seguir a todas as etapas indexadas nos números naturais, define-se a etapa E_ω que consiste na reunião de todas estas etapas, isto é, $E_\omega = \cup_n E_n$. E continuamos, definindo-se a etapa $E_{\omega+1}$ como aquela cujos elementos são os da etapa anterior (a etapa E_ω) em reunião com todos os seus subconjuntos; depois vêm as etapas $E_{\omega+2}$, $E_{\omega+3}$, etc., $E_{\omega+\omega}$, $E_{\omega+\omega+1}$, ... Vamos tentar ser um pouco mais sistemáticos. Além da etapa inicial (a dos proto-elementos) há dois princípios geradores de etapas. O primeiro diz que existe uma etapa imediatamente a seguir a uma dada etapa e que esta última se obtém da precedente juntando aos seus elementos os conjuntos que se podem formar com esses elementos. O segundo princípio permite passar dum segmento inicial de etapas sem máximo, previamente formado, para a etapa que lhe vem imediatamente a seguir — a qual consiste na união de todas as etapas anteriores.

A concepção iterativa dos conjuntos, em que estes são as coleções que aparecem, mais cedo ou mais tarde, numa das etapas descritas, é menos simples que a concepção ingénua, ligada ao uso irrestrito do princípio da abstracção, mas, ao contrário desta, evita os paradoxos conhecidos. A concepção iterativa pode espelhar-se formalmente na teoria ZF: nesta formalização, os índices das etapas são os números ordinais e as etapas (denotadas frequentemente por R_α) definem-se por RECORRÊNCIA TRANSFINITA: 1. $R_0 = \emptyset$; 2. $R_{\alpha+1} = P(R_\alpha)$; 3. Dado α um ordinal limite, $R_\alpha = \cup_{\lambda \in \alpha} R_\lambda$. (Demonstra-se que $R_\alpha \subseteq R_{\alpha+1}$ e que, portanto, esta hierarquia é cumulativa.) O *Fundierungsaxiom* é, na presença dos restantes axiomas de ZF, equivalente a dizer que todo o conjunto está nalgum R_α , para algum ordinal α . Simbolicamente: $\forall x \exists \alpha (x \in R_\alpha)$.

A teoria ZF é uma teoria pura de conjuntos, ao passo que a axiomática de Zermelo de 1908 permitia a existência de proto-elementos. Por outro lado, Zermelo também incluiu outro axioma de existência na sua axiomática, o denominado AXIOMA DA ESCOLHA. A existência ou não de proto-elementos não levanta proble-

teoria dos conjuntos

mas conceptuais de maior, ao contrário do axioma da escolha que é polêmico pelo seu carácter não construtivista. Modernamente, se quisermos incluir o axioma da escolha numa teoria dos conjuntos é costume notacional juntar à sua sigla a letra «C» (de «choice»): a teoria ZFC é a teoria ZF com o axioma da escolha.

Em 1938 Kurt Gödel demonstra a consistência relativa do axioma da escolha e da HIPÓTESE DO CONTÍNUO (HC). Gödel define, por recorrência transfinita, a denominada hierarquia dos conjuntos construtíveis: 1. $L_0 = \emptyset$; 2. $L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$; 3. Dado α um ordinal limite, $L_\alpha = \bigcup_{\lambda \in \alpha} L_\lambda$. Onde $D(X)$ é uma noção técnica de definibilidade: grosseiramente, $D(X)$ é o conjunto dos subconjuntos de X que são definíveis com parâmetros em X por uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos. A classe $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$ denomina-se universo dos conjuntos construtíveis. Gödel mostrou que L é um modelo (denominado, tecnicamente, de interno) da teoria dos conjuntos. Mais precisamente, Gödel mostrou que as relativizações dos axiomas da teoria dos conjuntos ZF a L são demonstráveis em ZF. Adicionalmente, as relativizações do axioma da escolha e da hipótese generalizada do contínuo também se demonstram em ZF. É este o cerne das demonstrações de consistência de Gödel.

A construção de Gödel mostra, mais fortemente, que o seguinte axioma da construtibilidade (abreviado pela sigla $V = L$), $\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$ é consistente relativamente a ZF. Poucos autores (e, certamente, não o próprio Gödel) vêem neste axioma algo mais do que um instrumento de estudo matemático.

Se bem que investigações em teoria dos cardinais inacessíveis (*ver* CARDINAL) e do universo construtível de Gödel tenham obtido alguns resultados matemáticos interessantes, o trabalho em teoria dos conjuntos esteve num impasse desde os resultados de Gödel até 1963. Uma ilustração desse impasse é a descoberta por Sheperdson, no início da década de cinquenta, de que o método dos modelos internos (usado por Gödel para demonstrar as consistências relativas do axioma da escolha e da

hipótese do contínuo) nunca poderia providenciar uma demonstração da independência relativa da hipótese do contínuo. Em 1963, um brilhante novo método foi inventado por Paul Cohen, um novato em teoria dos conjuntos. Ao contrário do método dos modelos internos que restringe o universo, o novo método de *forcing* expande o universo. Esta «expansão» merece ser comentada, pois põe-se o problema conceptual de expandir o universo de todos os conjuntos. Há várias maneiras de tornar esta dificuldade. Por exemplo, o que o método de *forcing* produz são expansões de modelos de conjuntos finitos de axiomas de ZF (a teoria ZF não demonstra a existência de modelos de todos os axiomas de ZF a menos que seja inconsistente, pois tal implicaria que ZF demonstraria a sua própria consistência, o que contradiz o TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL). Ora, para se obterem resultados de independência basta trabalhar com subconjuntos finitos arbitrários da axiomática, pois se uma frase é consequência dum conjunto de axiomas, então é consequência dum parte finita desse conjunto.

O método inventado por Cohen revelou-se muito fecundo, pois não só permitiu mostrar a independência relativa da hipótese do contínuo, como também permitiu responder a uma série de outras questões de independência. Se nos colocarmos numa perspectiva meramente dedutivista («if-thenism»), um resultado de independência relativa dum frase diz o seguinte: é uma questão de gosto ou arbítrio adicionar essa frase à teoria, ou adicionar a negação dessa frase. Assim, (à parte questões de gosto) seria arbitrário trabalhar na teoria Cantoriana ZFC + HC ou na teoria não Cantoriana ZFC + \neg HC. Porém, já no final da década de quarenta Gödel insurgia-se contra esta posição. Segundo Gödel, a independência relativa da hipótese do contínuo mostra que a axiomática ZFC não descreve completamente a realidade do universo dos conjuntos. Esta posição realista (ou platonista) de Gödel tem moldado a investigação em teoria dos conjuntos nas últimas três décadas, nomeadamente na consideração cuidadosa de novos candidatos a axiomas

para a teoria dos conjuntos. O próprio Gödel tinha em mente um determinado tipo de axiomas: os axiomas que postulam a existência de cardinais inacessíveis.

Mais recentemente surgiu um tipo de axiomas que também tem desempenhado um papel central em teoria dos conjuntos. São os axiomas de determinação. Este género de axiomas foi introduzido em 1962 por Jan Mycielsky e Hugo Steinhaus. Para melhor motivar os axiomas da determinação fixemos um número natural n e consideremos X um conjunto de sequências binárias (isto é, de 0 e 1) de comprimento n . Vamos descrever um jogo G_x entre dois jogadores I e II: os jogadores escolhem alternadamente 0 ou 1 e a iniciativa pertence ao jogador I. No caso de n ser ímpar o jogo tem o seguinte aspecto:

I escolhe	s_0	s_2	...	s_{n-2}	
II escolhe	s_1	s_3	...	s_{n-1}	

I ganha o jogo G_x se a sequência $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n-2}, s_{n-1}$ estiver em X . Caso contrário, é o jogador II que ganha. O jogador I tem uma estratégia vencedora para o jogo G_x se há x_0 (0 ou 1) tal que para qualquer escolha x_1 de II, há x_3 tal que para qualquer escolha x_4 de II, ..., etc. a sequência $x_0, x_1, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}$ está em X ; isto é, se 1) $\exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \dots \exists x_{n-2} \forall x_{n-1} (x_k)_{k < n} \in X$.

Analogamente, o jogador II tem uma estratégia vencedora para o jogo G_x se 2) $\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \forall x_{n-2} \exists x_{n-1} (x_k)_{k < n} \notin X$.

Observe-se que as frases 1 e 2 são a negação uma da outra. Conclusão: ou o jogador I tem uma estratégia vencedora para o jogo G_x , ou o jogador II tem uma estratégia vencedora para o jogo G_x .

Seja agora X um conjunto de sucessões («sequências infinitas») binárias. Neste caso o jogo G_x tem um número infinito de jogadas:

I escolhe	s_0	s_2	...	s_{n-2}	...
II escolhe	s_1	s_3	...	s_{n-1}	...

De maneira análoga ao caso finito, I ganha se a sucessão alternada de jogadas $(s_k)_{k \in \omega}$ esti-

ver em X . Caso contrário ganha II. Há uma maneira formal de definir estratégia ganhadora para I e estratégia ganhadora para II que segue os traços intuitivos do caso finito. Observe-se, no entanto, que no caso infinito não se pode formular o conceito de estratégia ganhadora através duma sequência alternada de quantificações existenciais e universais, pois tal sequência é infinita e, portanto, não constitui uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos. Em particular, não se pode argumentar como no caso finito para mostrar que ou I tem uma estratégia vencedora ou II tem. Nesta conformidade, o conjunto X é determinado se no jogo G_x algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora.

O axioma da determinação é a asserção de que todo o conjunto X de sucessões binárias é determinado. Este axioma tem consequências muito fortes e estruturantes no estudo dos subconjuntos do contínuo real (a disciplina que estuda estes assuntos intitula-se teoria descritiva dos conjuntos). Sabe-se, no entanto, que o axioma da determinação é incompatível com o axioma da escolha. No entanto, certas formas enfraquecidas do axioma da determinação (cujas formulações exigem um apetrecho técnico que não cabe neste artigo) poderão ser compatíveis com o axioma da escolha e, ainda assim, ter muitas das consequências desejadas.

Donald Martin, uma figura proeminente na investigação em teoria dos conjuntos nas últimas três décadas, escreveu em 1978 as seguintes linhas (referindo-se pela sigla PD a uma forma enfraquecida do axioma da determinação): «É PD verdadeiro? Não é, certamente, auto-evidente. Alguns investigadores de teoria dos conjuntos consideram os axiomas dos cardinais inacessíveis auto-evidentes, ou que pelo menos se seguem de princípios *a priori* que são consequência do conceito de conjunto. Formas fracas de PD [...] são consequência de certos axiomas de cardinais inacessíveis. É mesmo possível que PD seja consequência de cardinais inacessíveis, mas isso ainda não foi demonstrado».

O autor considera PD uma hipótese com estatuto similar às hipóteses teóricas da física.

teoria dos modelos

Têm-se produzido três tipos de indícios quase empíricos a favor de PD: 1) O mero facto de ainda não se ter refutado uma asserção tão poderosa constitui algum indício da sua verdade; 2) Alguns casos particulares de PD foram verificados. 3) As consequências de PD no domínio da teoria descritiva dos conjuntos são tão plausíveis e coerentes que elas dão plausibilidade ao princípio que as implica.

De facto, num culminar dum esforço de investigação, foi demonstrado em meados da década de oitenta que PD é consequência da existência dum certo cardinal inacessível!

Mais recentemente (1994), W. Hugh Woodin escreveu:

«Há escassos indícios *a priori* de que PD é um axioma plausível ou mesmo de que é consistente. No entanto, a teoria que se segue de PD é tão rica que, *a posteriori*, o axioma é consistente e verdadeiro. Esta é uma importante lição. Os axiomas não necessitam ser verdadeiros *a priori*.»

Termino, no entanto, com uma nota baixa. Ao contrário do que Gödel esperava, estas investigações ainda não lançaram uma luz definitiva sobre a hipótese do contínuo. Com efeito, sabe-se que os axiomas até agora propostos nem demonstram nem refutam essa hipótese. *Ver também* TEOREMA DE CANTOR, AXIOMA DA EXTENSIONALIDADE, PRINCÍPIO DA ABSTRACÇÃO, PARADOXO DE RUSSELL, PRINCÍPIO DO CÍRCULO VICIOSO, TEORIA DOS TIPOS, CÁLCULO DE PREDICADOS, QUANTIFICADOR, CLASSE, *NEW FOUNDATIONS*, AXIOMA DO INFINITO, AXIOMA DA ESCOLHA, AXIOMA DA FUNDAÇÃO, PROTO-ELEMENTO, CARDINAL, ORDINAL, BOA ORDEM, RECORRÊNCIA TRANSFINITA, HIPÓTESE DO CONTÍNUO, TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL. FF

Boolos, G. 1971. The Iterative Conception of a Set. *Journal of Philosophy* 68: 215–232. Reimpresso in *Philosophy of Mathematics*. Putnam, H. e Benacerraf, P., orgs. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Cantor, G. 1896. *Contributions to the Founding of*

the Theory of Transfinite Numbers. Trad. P. Jourdain. Nova Iorque: Dover Publications, 1955.

Cohen, P. 1966. Teoria dos Conjuntos e a Hipótese do Contínuo. Trad. M. S. Lourenço, in *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Lisboa: Gulbenkian, 1979.

Ferreira, F. 1998. Teoria dos Conjuntos: Uma Vista. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 38: 29–47.

Gödel, K. 1990. *Collected Works, vol. II*. Org. S. Feferman et al. Oxford: Oxford University Press.

Hallett, M. 1984. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon Press.

Kunen, K. 1980. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Amesterdão: North-Holland.

Maddy, P. 1988a. Believing the Axioms I. *Journal of Symbolic Logic* 53: 481–511.

Maddy, P. 1988b. Believing the Axioms II. *Journal of Symbolic Logic* 53: 736–764.

Maddy, P. 1990. *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, Cap. 4.

van Dalen, D. 1972. Set Theory from Cantor to Cohen. In *Sets and Integration*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Zermelo, E. 1908. Investigations in the Foundations of Set Theory I. In J. van Heijenoort, org., *From Frege to Gödel*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

teoria dos modelos *Ver* MODELOS, TEORIA DOS.

teoria dos tipos No artigo em que expôs pela primeira vez a teoria dos tipos (Russell 1908), Russell define o PRINCÍPIO DO CÍRCULO VICIOSO, que estipula que nenhuma totalidade pode conter elementos definidos em termos de si própria. A teoria simples dos tipos procura resolver os problemas levantados por uma das formas possíveis de violação deste princípio.

Segundo Russell, uma função denota «ambiguamente» uma certa totalidade, a dos valores que pode assumir (e portanto também a dos seus argumentos), pelo que não é bem definida se estes valores não estiverem previamente bem definidos (Russell e Whitehead 1962). Ou seja, é a função que pressupõe os seus valores e não o contrário, pelo que a tota-