

EM TORNO DA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE FREGE

por

Sancho Silva

Dissertação final para o Mestrado em Filosofia da Linguagem e da Consciência da Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa, orientada pelo Prof. Fernando Ferreira da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e apoiada pelo programa PRAXIS XXI da Fundação para a Ciência e Tecnologia.

Agosto de 2001.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	p.3
Cap. I : O PARADOXO DE RUSSELL	p.6
1. O Sistema Formal – GG – dos <i>Grundgesetze der Arithmetik</i> .	p.6
2. A Aritmética em GG .	p.8
3. O Paradoxo de Russell: A Inconsistência de GG .	p.13
Cap. II : A ORIGEM DA INCONSISTÊNCIA	p.15
Cap. III : NEO-LOGICISMO	p.29
1. O Princípio de Hume: a teoria PH .	p.29
2. Teorias Predicativas: GG ^{Pred*} e GG ^{Ram} +(red ^{Fin}).	p.64
CONCLUSÃO	p.74
APÊNDICES	
1a. O Teorema de Frege: a interpretação de PA2 em PH .	p.77
1b. A consistência de PH .	p.85
2a. A interpretação de Q em GG ^{Pred*} .	p.92
2b. A consistência de GG ^{Pred*} .	p.103
BIBLIOGRAFIA	p.110

INTRODUÇÃO

O *Begriffsschrift*, o *Die Grundlagen der Arithmetik* e os *Grundgesetze der Arithmetik* representam três etapas do programa logicista de Frege de redução da aritmética à lógica. No *Begriffsschrift*, publicado em 1879, Frege introduz (pela primeira vez na história) o cálculo de predicados (de todas as ordens) com axiomas e regras de inferência descritas em termos puramente sintáticos. Em 1884, nos *Grundlagen*, Frege expõe informalmente o seu programa, apresenta um rascunho de algumas demonstrações e discute algumas posições de filósofos e matemáticos no que respeita os fundamentos da aritmética. Em 1891 Frege adiciona ao seu sistema de lógica o célebre axioma (\forall) segundo o qual dois conceitos têm a mesma extensão se e só se forem verdadeiros exactamente dos mesmos objectos. Frege acreditava que este axioma era “indemonstrável” e devia “ser visto como uma lei fundamental da lógica”.¹ Dois anos mais tarde, em 1893, Frege publica o primeiro volume dos *Grundgesetze*. Neste livro Frege pretendia expor o seu projecto logicista de uma forma acabada, incluindo demonstrações formais detalhadas dos resultados mais importantes. No entanto, em 1902, antes da publicação do segundo volume, Frege recebe uma carta de Russell informando-o da existência de uma inconsistência – o Paradoxo de Russell – no seu sistema de lógica.² Em Outubro deste mesmo ano, no Apêndice ao segundo volume dos *Grundgesetze*, Frege tenta eliminar a inconsistência do seu sistema restringindo o âmbito do axioma (\forall). No

¹ Em *Funktion und Begriff*, tradução inglesa *Function and Concept* em P.Geach e M.Black (ed.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford University Press, 1952, p.26.

² Publicada em Jean van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967.

entanto, nos anos que se seguiram Frege foi tomando consciência que a sua solução não funcionava e, por volta de 1924, acabou mesmo por adoptar uma nova filosofia da aritmética. Agora, Frege defendia que a aritmética não pode ser fundamentada só na lógica: ela assenta também em intuições temporais e espaciais sendo, portanto, sintética.³

Entretanto, olhando para o programa logicista de Frege de uma perspectiva contemporânea, existem várias razões para tentar eliminar a inconsistência alterando o menos possível o sistema formal dos *Grundgesetze*. Podemos, por um lado, querer saber quão próximo Frege ficou de terminar o seu programa, e qual a origem exacta da inconsistência. Por outro lado podemos estar interessados na defesa de um programa neo-logicista de redução da aritmética à lógica, em encontrar sistemas consistentes que interpretem (alguma) aritmética e cujos axiomas possam ser interpretados como verdades lógicas. Por último, podemos estar simplesmente interessados, em geral, em interpretações da aritmética em teorias formais, nos axiomas fundamentais destas teorias e na sua força dedutiva e consistência.

No que se segue vamos introduzir o sistema formal dos *Grundgesetze* – **GG** – mostrar como Frege definiu, neste sistema, as noções aritméticas mais básicas, mostrar como interpretar, a partir destas definições, os axiomas da aritmética de segunda-ordem – **PA2** – e mostrar como interpretar o Paradoxo de Russell.

De seguida vamos tentar determinar qual a origem ou causa da inconsistência do sistema **GG**. Isto vai levar-nos a estudar a força dedutiva de alguns sub-sistemas

³ Ver, a este respeito, G.Frege, “Ein neuer Versuch einer Grundlegung der Arithmetik”, tradução inglesa “A New Attempt at a Foundation for Arithmetic” em H.Hermes, F.Kambartel, F.Kaulbach (ed.), *Gottlob Frege, Posthumous Writings*, Oxford University Press, 1979.

consistentes de **GG** resultantes da eliminação em **GG** de alguns aspectos que pareçam ser responsáveis pela inconsistência.

Finalmente tentaremos avaliar a viabilidade de um programa neo-logocista dos fundamentos da aritmética à luz dos resultados obtidos nos capítulos precedentes procurando determinar até que ponto alguns dos sistemas estudados podem ser interpretados como sistemas lógicos.

CAPÍTULO I:

O PARADOXO DE RUSSELL

1. O sistema formal – **GG** – dos *Grundgesetze der Arithmetik*

No que se segue vamos apresentar o sistema formal dos *Grundgesetze*, **GG**. Em vez da notação que o próprio Frege utilizou vamos adoptar uma notação contemporânea. Nada de importante será alterado com esta mudança de notação. Vamos também limitar-nos ao fragmento de segunda-ordem do sistema original de Frege.

A linguagem de **GG** é a linguagem da lógica de segunda-ordem que, para além das habituais constantes lógicas, contém:

- (a) Variáveis para objectos: “a”, “b”, ..., “x”, “y”, “z”, etc.;
- (b) Variáveis para conceitos de primeira-ordem: “F”, “G”, “H”, etc.;
- (c) Variáveis para relações binárias de primeira-ordem: “P”, “Q”, “R”, etc.;

Para além destas expressões a linguagem de **GG** contém a expressão-funcional “ \wedge ” (“a extensão de...”) para uma função entre conceitos e objectos.

GG consiste numa axiomatização da lógica de segunda-ordem plena⁴ acrescida do célebre axioma (**v**) que governa a expressão-funcional “ \wedge ”:

⁴ Dizemos que a lógica de segunda-ordem é “plena” quando inclui o axioma da compreensão

$$\text{(comp):} \quad \exists F \forall x (Fx \leftrightarrow A(x))$$

que afirma, para cada fórmula $A(x)$, a existência de um conceito verdadeiro apenas dos objectos dos quais ela é verdadeira. Note-se que este último axioma não foi explicitamente formulado por Frege.

$$(v): \quad \wedge F = \wedge G \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \quad ^5$$

e segundo o qual dois conceitos têm a mesma extensão se e só se forem verdadeiros exactamente dos mesmos objectos.

Frege define neste sistema as noções aritméticas mais básicas (i.e. os números naturais 0, 1, 2, 3, etc., o conceito de número natural, e as operações da adição e da multiplicação) e consegue demonstrar, como veremos na próxima secção, relativizações a um determinado predicado de todos os axiomas de **PA2**.⁶ Aqui

No entanto, ao aceitar que qualquer fórmula possa ser substituída por uma variável de segunda-ordem Frege estava, implicitamente, a aceitar este axioma.

Note-se que a expressão "**A(x)**" funciona aqui como uma *variável sintáctica*, ou seja, uma variável cujos valores são fórmulas da linguagem-objecto em que a variável "x" ocorre livre. Através do uso de variáveis sintácticas e do uso das aspas rectas "[" e "]" é possível citar determinados conjuntos de expressões da linguagem-objecto. Dizer, por exemplo, que a frase $\lceil \exists x \mathbf{F} \rceil$ é verdadeira para todos os predicados **F** é dizer que todas as frases que se obtêm pela substituição do símbolo "t" na expressão " $\exists xt$ " por predicados são verdadeiras. Para diferenciar as variáveis sintácticas das variáveis da linguagem objecto as primeiras serão impressas em itálico e negrito.

⁵ Para sermos mais exactos, Frege utiliza o axioma mais forte $\lceil \wedge F = \wedge G \rceil = \lceil \forall x(Fx = Gx) \rceil$, em que *F* e *G* são variáveis para funções entre objectos. Nos *Grundgesetze*, Frege identifica os conceitos com funções entre objectos e valores de verdade e identifica os valores de verdade com objectos. Desta forma, o axioma (v) de Frege implica o nosso. Nenhum dos resultados que iremos apresentar dependerá desta diferença.

Devíamos, por outro lado, escrever " $\wedge x.Fx$ " em vez de " $\wedge F$ " pois o operador " \wedge " liga obrigatoriamente uma variável. Utilizaremos esta notação mais abreviada sempre que não exista ambiguidade em relação à variável que o operador " \wedge " liga, como é o caso em " $\wedge F$ ".

⁶ Por "relativização" de um axioma α a um predicado **P** entendemos o axioma que se obtém pela substituição em α de todas as quantificações do género $\lceil \forall x \mathbf{A}(x) \rceil$ pela quantificação $\lceil \forall x(\mathbf{P}x \rightarrow \mathbf{A}(x)) \rceil$ e de todas as quantificações do género $\lceil \exists x \mathbf{A}(x) \rceil$ pela quantificação $\lceil \exists x(\mathbf{P}x \wedge \mathbf{A}(x)) \rceil$.

podíamos querer ser irónicos e dizer: é claro que se conseguem demonstrar relativizações de todos estes axiomas uma vez que o sistema é inconsistente e num sistema inconsistente tudo é demonstrável. É possível no entanto distinguir, entre as consequências de um conjunto inconsistente de axiomas, aquelas que podem ser demonstradas sem recurso ao facto dos axiomas serem inconsistentes – as “boas” consequências – daquelas que não podem – as “más” consequências. Ora, tudo o que Frege demonstra em **GG** são *boas* consequências. A interpretação de Frege de **PA2** em **GG** é, por conseguinte, e não obstante a inconsistência de **GG**, de grande interesse lógico-matemático e filosófico. Por outro lado, a possibilidade de se alterar algum aspecto do sistema **GG** de forma a torná-lo consistente sem no entanto bloquear a interpretação da aritmética permanece em aberto. Aliás, como iremos ver na próxima secção, a quase totalidade da interpretação de Frege de **PA2** em **GG** é feita numa sub-teoria consistente de **GG**.

2. A aritmética em **GG**

No que se segue vamos mostrar como Frege interpretou a aritmética de segunda-ordem, **PA2**, no sistema **GG** dos *Grundgesetze*.

PA2 é uma teoria que tem por base a linguagem da lógica de segunda-ordem acrescida do predicado “**P**”, do nome próprio “**0**” e das expressões-operacionais binárias “**x**” e “**+**”. Para além dos axiomas de lógica de segunda-ordem plena, **PA2** tem por base os seguintes axiomas:

$$(a_1) \quad \exists y(xPy)$$

$$(a_2) \quad \exists y(yPx) \leftrightarrow x \neq 0$$

$$(a3) \quad xPy \wedge wPz \rightarrow (x=w \leftrightarrow y=z)$$

$$(a4) \quad x+0=x$$

$$(a5) \quad yPw \wedge (x+y)Pz \rightarrow x+w=z$$

$$(a6) \quad x \times 0=0$$

$$(a7) \quad yPw \rightarrow x \times w=(x \times y)+x$$

$$(a_{ind}) \quad F0 \wedge P\text{-trans-}F \rightarrow \forall xFx \quad ^7$$

Dados os resultados de Dedekind referentes à legitimidade de definições recursivas no contexto da lógica de segunda-ordem plena, para interpretar **PA2** em **GG** basta-nos interpretar os axiomas (a1), (a2), (a3) e (a_{ind}).⁸

⁷ Em que $R\text{-trans-}F \leftrightarrow_{def} \forall x \forall y (Fx \wedge xRy \rightarrow Fy)$.

⁸ No seu *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?* (1887) Richard Dedekind demonstrou a legitimidade das definições recursivas sobre os números naturais. Dedekind demonstrou que, no contexto da lógica de segunda-ordem plena, os axiomas (a1), (a2), (a3) e (a_{ind}) implicam $\exists!R[\forall xR(x,0,x) \wedge \forall y \forall w \forall z \forall k (yPw \wedge R(y,z,k) \rightarrow R(w,z,k')) \wedge \forall a \forall b \exists!cR(a,b,c)]$, (em que $k'=x \leftrightarrow_{def} kPx$) o que implica que esta fórmula pode ser utilizada para definir uma função binária + (a adição). Dada a operação da adição Dedekind também demonstra que $\exists!R[\forall xR(x,0,0) \wedge \forall y \forall w \forall z \forall k ((yPw \wedge R(y,z,k) \rightarrow R(w,z,k+z))) \wedge \forall a \forall b \exists!cR(a,b,c)]$, o que implica, por sua vez, que esta fórmula pode ser utilizada para definir uma outra função binária \times (a multiplicação). Em geral, Dedekind demonstrou que, no contexto da lógica de segunda-ordem plena, os axiomas (a1), (a2), (a3) e (a_{ind}), implicam todas as frases do género

$$\lceil \exists!R[\forall xR(0,x,F(x)) \wedge \forall y \forall w \forall z \forall k ((yPw \wedge R(y,z,k) \rightarrow R(w,z,G(k,z))) \wedge \forall a \forall b \exists!cR(a,b,c)] \rceil$$

em que $F(x)$ e $G(k,z)$ são expressões-funcionais.

Isto implica que, no contexto da lógica de segunda-ordem plena, os axiomas (a4),..., (a7) são interpretáveis a partir dos axiomas (a1), (a2), (a3) e (a_{ind}). Para interpretar a teoria **PA2** em **GG**, ou

Começamos por definir em **GG** os símbolos não lógicos primitivos que ocorrem nos axiomas (**a1**), (**a2**), (**a3**) e (**a_{ind}**), a saber, o nome próprio “**0**” (“zero”), a expressão-relacional binária de primeira-ordem “**P**” (“predecessão”). Em segundo lugar devemos demonstrar que é possível definir em **GG** um predicado tal que as relativizações dos axiomas (**a1**), (**a2**), (**a3**) e (**a_{ind}**) a este predicado são teoremas de **GG**. (Este predicado será o predicado “**Nat**” para o conceito de número natural).

Antes de definirmos os símbolos não lógicos “**P**” e “**0**” começamos por definir alguns símbolos que iremos utilizar nessas definições. Em primeiro lugar definimos para cada fórmula **A(x)** livre em *x*, o conceito $[x:A(x)]y$:

$$[x:A(x)]y \leftrightarrow_{\text{def}} A(y) \quad ^9$$

Em seguida definimos as relações \in e \notin de “pertença” e “não pertença”:

$$x \in y \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F(Fx \wedge y = \wedge F)$$

$$x \notin y \leftrightarrow_{\text{def}} \neg x \in y$$

e a relação \cong de “equinumeracidade” entre objectos:

$$x \cong y \leftrightarrow_{\text{def}} \exists R[\forall w(w \in x \rightarrow \exists! z(z \in y \wedge wRz)) \wedge \forall z(z \in y \rightarrow \exists! w(w \in x \wedge wRz))] \quad ^{10}$$

(Dois objectos *x* e *y* são equinumeráveis se e só se existe uma bijecção entre os objectos que pertencem a *x* e os objectos que pertencem a *y*). Repare-se que, segundo esta definição, todos os objectos que não são extensões são equinumeráveis com extensões de conceitos vazios.

noutras teorias de segunda-ordem plena, bastará portanto interpretar os axiomas (**a1**), (**a2**), (**a3**) e (**a_{ind}**).

⁹ **A(y)** denota aqui a fórmula que se obtém a partir da fórmula **A(x)** substituindo a variável “*x*” pela variável “*y*”. Esta definição é legitimada pelo axioma de compreensão (**comp**).

¹⁰ $\exists! x A(x) \leftrightarrow_{\text{def}} \exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow x=y))$.

Definimos a função numérica $\#$ como a função que faz corresponder a cada o objecto x extensão do conceito *objecto equinúmero com x* :

$$\#x =_{\text{def}} \wedge [y: y \equiv x]$$

Podemos agora definir o conceito **Card** de número cardinal. Um objecto x é um número cardinal se e só se existe um objecto y tal que x é o número de y :

$$\mathbf{Card}x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists y (x = \#y).$$

Seguem-se as definições dos símbolos “**0**” e “**P**”. Começamos por definir o número zero como o *número da extensão do conceito $[x: x \neq x]$* :

$$\mathbf{0} =_{\text{def}} \# \wedge [x: x \neq x].$$

Segue-se a definição da relação **P** de predecessão. Dizemos que um objecto x precede um objecto y se e só se existe um conceito F verdadeiro de um objecto k tal que y é o número da extensão de F e x é o número da extensão do conceito *objecto diferente de k do qual F é verdadeiro*:

$$xPy \leftrightarrow_{\text{def}} \exists a \exists b \exists k [x = \#a \wedge y = \#b \wedge k \in b \wedge \forall w (w \in a \leftrightarrow (w \in b \wedge w \neq k))].$$

Resta-nos agora definir o conceito **Nat** de número natural em relação ao qual vamos demonstrar as relativizações dos axiomas de **PA2**. Neste sentido, começamos por definir a expressão-funcional “*****” que refere uma função que faz corresponder cada relação R à relação que tenta “captar” formalmente a relação existente entre dois objectos x e y quando existe uma série *finita* de objectos a, b, c, \dots, z , tal que $xRa, aRb, bRc, \dots, zRy$:

$$xR*y \leftrightarrow_{\text{def}} \forall F (\forall a (xRa \rightarrow Fa) \wedge R\text{-trans-}F \rightarrow Fy)$$

Isto permite-nos definir o conceito **Nat** de número natural como o conceito verdadeiro só dos números cardinais dos quais o zero é um predecessor ancestral mais o próprio zero:

$$\mathbf{Nat}x \leftrightarrow_{\text{def}} \mathbf{0}P*x \vee x = \mathbf{0}.$$

Não vamos aqui seguir a interpretação de Frege na sua totalidade. Vamos simplesmente mostrar que é possível interpretar em **GG** o axioma

$$(ph): \#F = \#G \leftrightarrow F \approx G \quad ^{11}$$

conhecido como o “Princípio de Hume”. A teoria de lógica de segunda-ordem plena cujo único axioma não lógico é (ph) – chamemo-lhe “PH” – é consistente (ver Apêndice 1b) e interpreta **PA2** (ver Apêndice 1a). Segue-se que **GG** interpreta **PH** e **PH** interpreta **PA2** e, dada a transitividade da relação de interpretação entre teorias, **GG** interpreta **PA2**.

Para interpretar (ph) em **GG** começamos por interpretar o axioma

$$(ph^*): \#x = \#y \leftrightarrow x \approx y$$

segundo o qual dois objectos têm o mesmo número se e só se forem equinumericos.

Suponhamos que $\#x = \#y$. Então, pela definição de #, $\wedge[w:w \approx x] = \wedge[w:w \approx y]$. Pelo axioma (v) segue-se que $\forall w(w \approx x \leftrightarrow w \approx y)$. Mas $x \approx x$ pela reflexividade¹² de \approx . Segue-se que $x \approx y$.

Suponhamos agora que $x \approx y$. Se $w \approx x$, pela transitividade¹³ de \approx temos $w \approx y$. Pelas mesmas razões temos $w \approx y \rightarrow w \approx x$. Segue-se que $\forall w(w \approx x \leftrightarrow w \approx y)$ e, pelo axioma (v), que $\wedge[w:w \approx x] = \wedge[w:w \approx y]$, ou seja, $\#x = \#y$. \square

Se definirmos o número de um conceito como o número da sua extensão:

$$\#F =_{\text{def}} \#(\wedge F) \quad ^{14}$$

¹¹ Dizemos que dois conceitos são “equinumericos” (estão na relação \approx) se e só se existir uma bijecção entre eles. Formalmente: $F \approx G \leftrightarrow_{\text{def}} \exists R[\forall x(Fx \rightarrow \exists!y(Gy \wedge xRy)) \wedge \forall y(Gy \rightarrow \exists!x(Fx \wedge xRy))]$.

¹² A relação de igualdade é uma bijecção entre x e x .

¹³ Se R é uma bijecção entre x e y e Q é uma bijecção entre y e z então a composição $Q \circ R$ é uma bijecção entre x e z .

dado que

$$F \approx G \leftrightarrow \wedge F \cong \wedge G \quad 15$$

é fácil ver que o axioma

$$(ph) \quad \#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$$

é uma consequência do axioma **(ph*)**.¹⁶

3. O Paradoxo de Russell: a inconsistência de **GG**

Vamos agora demonstrar que o sistema **GG** é inconsistente interpretando o Paradoxo de Russell. Informalmente, o paradoxo obtém-se definindo, em primeiro lugar, a extensão (ou conjunto) de todas as extensões (ou conjuntos) que não pertencem a si próprias. De seguida perguntamos se esta extensão pertence ou não a si própria. Por fim concluímos de forma paradoxal que ela pertence a si própria se e só se ela não pertencer a si própria.

Começamos então por definir a *Extensão de Russell*, r , como a extensão do conceito *objecto que não pertence a si próprio*:

$$r =_{\text{def}} \wedge [x: x \notin x]$$

¹⁴ Para sermos exactos, deveríamos escrever “ $\#x.Fx$ ” e não apenas “ $\#F$ ” pois o operador “ $\#$ ” liga obrigatoriamente uma variável. Se $A(x,y)$ é uma fórmula com duas variáveis livres, por exemplo, então $\#A(x,y)$ é ambíguo entre $\#x.A(x,y)$ e $\#y.A(x,y)$. Se, no entanto, $A(x)$ for uma fórmula com apenas uma variável livre, será possível escrever $\#A$ em vez de $\#x.A(x)$ sem criar ambiguidade. Isto será feito doravante.

¹⁵ Isto é uma consequência de $\forall x(Fx \leftrightarrow x \in \wedge F)$.

¹⁶ Suponhamos que $\#x = \#y \leftrightarrow x \approx y$. Se $\#F = \#G$ então $\# \wedge F = \# \wedge G$ então $\wedge F \approx \wedge G$ então $F \approx G$. Se $F \approx G$ então $\wedge F \approx \wedge G$ então $\# \wedge F = \# \wedge G$ então $\#F = \#G$. \square

Em seguida demonstramos que $r \in r \leftrightarrow r \notin r$:

Suponhamos que $r \in r$. Pela definição de r , $\wedge[x:x \notin x] \in \wedge[x:x \notin x]$. Pela definição de \in , $\exists F(\wedge F = \wedge[x:x \notin x] \wedge F \wedge [x:x \notin x])$. Pelo axioma (v), $Fx \leftrightarrow x \notin x$, e logo $\wedge[x:x \notin x] \notin \wedge[x:x \notin x]$, ou seja, $r \notin r$. Suponhamos agora que $r \notin r$. Pela definição de r , $\wedge[x:x \notin x] \notin \wedge[x:x \notin x]$. Pela definição de \in , $\neg \exists F(\wedge F = \wedge[x:x \notin x] \wedge F \wedge [x:x \notin x])$, ou seja, $\forall F(\wedge F = \wedge[x:x \notin x] \rightarrow \neg F \wedge [x:x \notin x])$. Mas então $\neg[x:x \notin x] \wedge [x:x \notin x]$, ou seja $\neg(\wedge[x:x \notin x] \notin \wedge[x:x \notin x])$. Eliminando a dupla negação obtemos $\wedge[x:x \notin x] \in \wedge[x:x \notin x]$, ou seja, $r \in r$. Contradição.

Segue-se que **GG** é formalmente inconsistente.

CAPÍTULO II:

A ORIGEM DA INCONSISTÊNCIA?

Em *Frege: Philosophy of Mathematics* M.Dummett levanta a questão *Qual é a origem da inconsistência do sistema GG?*¹⁷ À primeira vista esta questão parece ter uma resposta simples: o axioma (v). Em primeiro lugar, porque este axioma é, aparentemente, o único axioma não lógico de **GG**. Em segundo lugar, porque a verdade deste axioma implica que existem pelo menos tantos objectos quantos conceitos. Ora, como Cantor nos mostrou, se existem k objectos então existem 2^k conceitos e $k < 2^k$ para qualquer k .

Segundo Dummett, no entanto, a inconsistência formal de **GG** deve-se mais aos quantificadores de segunda-ordem do que à presença do axioma (v).¹⁸ Para chegar a esta conclusão Dummett fundamenta-se no capítulo 31 dos *Grundgesetze* onde Frege tenta demonstrar que todas as frases da linguagem de **GG** têm, de acordo com as suas especificações, um valor de verdade determinado. Dada a inconsistência formal da teoria **GG** é óbvio que a demonstração de Frege está errada (ainda que seja difícil dizer onde se encontra(m) o(s) erro(s) uma vez que a demonstração é bastante vaga e incompleta). É, no entanto claro, que a estratégia de Frege é indutiva: a sua ideia é partir de um conjunto inicial de expressões com referência ou valor de verdade e, passo a passo, “alargar” este conjunto até abranger a totalidade das expressões. Ora, segundo Dummett, dada a forma como

¹⁷ M.Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1991, pp. 217-222.

¹⁸ *Ibid*, p. 218.

Frege define os quantificadores de segunda-ordem, a sua demonstração por indução não poderá resultar. O problema é que existem predicados em que ocorrem quantificadores de segunda-ordem e que Frege quer demonstrar terem uma referência. Um exemplo é o predicado “ $\forall F(Fx)$ ”. Segundo as estipulações de Frege este predicado tem uma referência se e só se, para todos os nomes próprios n com referência, a frase $\lceil \forall F(Fn) \rceil$ tem um valor de verdade. Mas, também segundo as estipulações de Frege, estas frases têm um valor de verdade se e só se para todos os predicados F com referência, a frase $\lceil Fn \rceil$ tem sempre um valor de verdade. O problema é que “ $\forall F(Fx)$ ” é ele próprio um predicado que é suposto ter uma referência pelo que Frege deve demonstrar, em particular, que as frases $\lceil \forall F(Fn) \rceil$ têm sempre um valor de verdade. Mas isto era o que estávamos a tentar demonstrar, ou seja, estamos a andar em círculos.

Como é que Dummett relaciona este erro na demonstração de Frege com a origem da inconsistência de **GG**? A sua ideia é – ou *parece* ser, uma vez que Dummett não esclarece a sua posição com muita clareza – que o predicado “**R**” definido através da equivalência $Rx \leftrightarrow_{def} \forall F(x \wedge F \rightarrow \neg Fx)$, que está na origem do Paradoxo de Russell, encontra-se numa situação semelhante à do predicado “ $\forall F(Fx)$ ”. Para demonstrar que “**R**” tem uma referência, Frege necessita demonstrar que todas as frases do género $\lceil n \wedge F \rightarrow \neg Fn \rceil$, em que n é um nome próprio com referência e F é um predicado com referência, têm um valor de verdade. Em particular, Frege tem que demonstrar que as frases $\lceil n \wedge R \rightarrow \neg Rn \rceil$ têm um valor de verdade determinado e, em particular, que todas as frases $\lceil Rn \rceil$ têm um valor de verdade determinado. Mais uma vez voltámos ao ponto inicial. Agora, no entanto, a situação é mais complicada uma vez que, neste caso, é possível demonstrar que $R \wedge R \leftrightarrow \neg R \wedge R$, ou seja, o Paradoxo de Russell. Apesar desta diferença Dummett

conclui que o “problema” com o predicado “ $\forall F(Fx)$ ” tem a mesma origem que o “problema” com o predicado “**R**”: a forma “descuidada” como Frege “trata” os quantificadores de segunda-ordem.¹⁹

No último capítulo de *Frege: Philosophy of Mathematics*, Dummett explica-nos com mais precisão qual é segundo ele a ligação entre os quantificadores de segunda-ordem e a inconsistência de **GG**. Suponhamos que o predicado “**R**” tem uma referência relativamente a uma interpretação *I* cujo domínio de primeira-ordem é **U**. Para que o axioma (**v**) possa ser verdadeiro em *I*, o predicado “**R**” tem que ter uma extensão *r*. Mas segundo o Paradoxo de Russell temos $Rr \leftrightarrow \neg Rr$ o que implica, segundo Dummett, que $\neg \exists x(x=r)$, ou seja, que a extensão *r* não pode ser incluída no domínio de primeira-ordem **U** mas apenas num domínio mais abrangente $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U} \cup \{r\}$. Ora, se identificarmos o domínio \mathbf{U}_1 como o domínio de primeira-ordem de *I*, obtendo uma nova interpretação *I*₁, o predicado “**R**” terá uma nova extensão *r*₁ que, mais uma vez, não poderá pertencer ao domínio \mathbf{U}_1 mas apenas a um novo domínio $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 \cup \{r_1\}$ de uma nova interpretação *I*₂. Repetindo este processo podemos gerar uma série de domínios **D**₁, **D**₂,... cada vez mais abrangentes de uma série de interpretações *I*₁, *I*₂,... Isto implica que o predicado “**R**” refere, no limite, um conceito que não podemos assumir ter uma extensão pertencente ao seu próprio universo de aplicação (i.e. ao conjunto de objectos dos quais faz sentido dizer que o conceito é verdadeiro ou falso) sem cairmos em contradição, ou seja, refere um “conceito indefinidamente extensível”²⁰. Ora o problema é que da forma como Frege construiu o seu sistema, o nome próprio “*r*” refere necessariamente um objecto que pertence ao universo de aplicação do conceito **R**. Daí, segundo Dummett, a inconsistência.

¹⁹ Ibid, p.218.

Daí também Dummett dizer-nos que “o erro de Frege foi supor que existe uma totalidade que contem a extensão de todos os conceitos definidos sobre ela; em geral, foi ele não ter a mínima suspeita da existência de *conceitos indefinidamente extensíveis*”.²¹

É claro que esta explicação de Dummett da génese da inconsistência de **GG** só poderá estar correcta se ao eliminarmos os quantificadores de segunda-ordem da linguagem de **GG** – sem os quais não é possível demonstrar a existência de conceitos indefinidamente extensíveis – obtemos uma teoria consistente. Dummett diz-nos que o fragmento de primeira-ordem de **GG** é de facto consistente e dá-nos algumas indicações de como construir um modelo para este fragmento.²² Deve-se, no entanto, a Terence Parsons o mérito de demonstrar com precisão a consistência do fragmento de primeira-ordem de **GG**.²³

Repare-se no entanto que, segundo o raciocínio de Dummett, o problema deve-se mais precisamente à *impredicatividade* de segunda-ordem da teoria **GG**. Dizemos que uma definição de um conceito é impredicativa quando ocorrem no *definiens* quantificadores de segunda-ordem a cujo domínio o próprio conceito que está a ser definido é suposto pertencer. Uma teoria diz-se impredicativa no que respeita a segunda-ordem quando assume *explicitamente* através dos seus axiomas a validade de um conjunto de definições de conceitos impredicativas. Face ao axioma (**comp**), a teoria **GG** é obviamente uma teoria impredicativa no que respeita a segunda-

²⁰ Ibid, p.317.

²¹ Ibid, p.317.

²² Ibid, p.219.

²³ Ver o artigo de Parsons “On the Consistency of the First-order Portion of Frege’s Logical System” (1987) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.

ordem: dada uma fórmula qualquer é sempre possível utilizá-la na definição do conceito verdadeiro apenas dos objectos dos quais ele é verdadeira, mesmo que ela contenha quantificadores de segunda-ordem a cujo domínio esse conceito é suposto pertencer. É por esta razão que, ao tentar demonstrar a verdade de todos os axiomas de **GG**, Frege se vê obrigado a demonstrar que *todas* as fórmulas da sua linguagem têm um conceito como referência (inclusive aquelas em que ocorrem quantificadores de segunda-ordem). Se restringíssemos a validade do axioma (**comp**) a fórmulas sem quantificadores de segunda-ordem a teoria **GG** seria predicativa no que respeita a segunda-ordem e Frege não seria obrigado, em particular, a demonstrar que os predicados “ $\forall F(Fx)$ ” e “**R**” têm uma referência. Ambos os “problemas” que em cima relacionámos com estes predicados (a incapacidade de demonstrar por indução que os predicados que contêm quantificadores de segunda-ordem têm uma referência por um lado, e o Paradoxo de Russell por outro) e que Dummett aponta como estando na génese da inconsistência desapareceriam. É portanto o carácter impredicativo dos quantificadores de segunda-ordem, e não estes quantificadores *per se*, que é, segundo o raciocínio de Dummett, o principal “culpado” pela inconsistência de **GG**.

Resta saber, também aqui, se o fragmento predicativo de **GG** é uma teoria consistente. Em «The consistency of Predicative Fragments of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*»²⁴ Richard Heck demonstrou (ver Apêndice 2b) a consistência deste fragmento, mais especificamente, da teoria que se obtém – chamemo-lhe “**GG**^{Pred*}” – restringindo o axioma de compreensão (**comp**) a fórmulas

²⁴ Richard Heck, «The consistency of Predicative Fragments of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*» (1996) em *History and Philosophy of Logic*, 17, 1996.

sem quantificadores de segunda-ordem (chamemos a este axioma “(**comp-pred**)”) e substituindo o axioma (**v**) pela sua versão esquemática

$$(\mathbf{v-esq}): \quad \wedge \mathbf{A}(x) = \wedge \mathbf{B}(x) \leftrightarrow \forall x(\mathbf{A}(x) \leftrightarrow \mathbf{B}(x)). \quad ^{25}$$

Como Heck nos diz, este resultado “adiciona alguma força à tese de Dummett que o Paradoxo de Russell aparece no sistema de Frege devido a uma circularidade inerente à quantificação de segunda-ordem impredicativa”.²⁶

No seu artigo “Whence the Contradiction?” George Boolos desenvolve alguns argumentos contra esta posição de Dummett.²⁷ Segundo Boolos, o raciocínio de Dummett não é suficiente para fundamentar a sua conclusão. Afinal os problemas com ambos os predicados parecem ser substancialmente diferentes: no caso do predicado “ $\forall F(Fx)$ ” tudo o que Dummett nos mostra é que o raciocínio indutivo de Frege não é suficiente para demonstrar que ele tem uma referência (fica por mostrar, em particular, se existe ou não um outro método para demonstrar que ele tem ou não uma referência). No caso do predicado “**R**”, apesar de ser verdade que o

²⁵ À luz do axioma de compreensão (**comp**), o axioma (**v**) é materialmente equivalente à sua versão esquemática (**v-esq**). No entanto, se restringirmos a validade de (**comp**) a fórmulas sem quantificadores de segunda-ordem, o axioma (**v**) fica mais fraco do que (**v-esq**).

Ao restringirmos o axioma (**comp**) em **GG** a fórmulas sem quantificadores de segunda-ordem e ao substituirmos o axioma (**v**) pela sua versão esquemática (**v-esq**) – obtendo o sistema **GG**^{Pred*} – é possível eliminar de **GG** todos os conceitos definidos impredicativamente, sem eliminar, no entanto, as extensões destes conceitos. Como veremos no Apêndice 2b, **GG**^{Pred*} demonstra a existência da Extensão de Russell $r \text{=}_{\text{def}} \wedge \exists F(x = \wedge F \wedge \neg Fx)$ sem que no entanto exista o conceito de Russell $Rx \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F(x = \wedge F \wedge \neg Fx)$.

²⁶ Ibid, p.217.

²⁷ George Boolos, “Whence the Contradiction?” (1993) em *Aristotelian Society Supplementary*, vol.67, 1993, pp. 213-233.

raciocínio indutivo de Frege continuar a ser insuficiente para demonstrar que ele tem uma referência, o problema vai bastante mais longe: este predicado está de alguma forma envolvido na interpretação de um paradoxo. Não é portanto correcto assumir, como Dummett assume, que estes problemas têm uma única e mesma origem.

Ao contrário de Dummett, Boolos prefere acusar o axioma (**v**) de ser o principal responsável pela inconsistência de **GG**. Boolos justifica a sua acusação por intermédio do raciocínio de Cantor que referimos em cima: o problema com o axioma (**v**), segundo Boolos, é que implica a existência de uma função injectiva entre os conceitos e os objectos. Ora isto só será possível se $k \leq 2^k$, em que k é o número dos objectos. Mas Cantor mostrou-nos que $2^k > k$ para qualquer k . Daí a inconsistência.

Intuitivamente esta posição de Boolos parece ser a mais correcta. No entanto, tudo o que o raciocínio de Cantor e Boolos nos mostra é que (**v**) não tem modelos plenos, ou seja, modelos em que o domínio de segunda-ordem é identificado com a classe de todos os subconjuntos do domínio de primeira-ordem. Poderíamos definir modelos de teorias de segunda-ordem com \aleph_0 objectos e \aleph_0 conceitos em que o domínio de segunda-ordem não é identificado com a classe de todos os subconjuntos do domínio de primeira-ordem (chamados “modelos de Henkin”). O raciocínio não mostra, em particular, que (**v**) seja, por si só, responsável pela inconsistência formal de **GG**.

Chegados a este ponto devemos perguntar-nos quais os critérios (se é que existem) para acusar um determinado aspecto da teoria **GG** de ser o *principal* responsável pela sua inconsistência. Uma condição necessária para um determinado aspecto de uma teoria inconsistente **T** poder ser acusado de ser responsável pela inconsistência de **T** é, como é óbvio, que a teoria que se obtém a

partir de **T** pela eliminação desse aspecto seja consistente. Tipicamente, no entanto, existirão vários aspectos responsáveis. Qual deles é o *principal*? Neste ponto teremos que analisar o comportamento de cada um dos aspectos responsáveis noutras teorias. Se todas (ou um grande número) de teorias em que um determinado aspecto α responsável pela inconsistência de **T** (de acordo com o nosso primeiro critério) estiver presente forem *inconsistentes*, ao passo que todas (ou um grande número) de teorias em que os restantes aspectos responsáveis pela inconsistência de **T** tiverem presentes forem *consistentes*, a “culpa” da inconsistência de **T** deverá recair sobre α . Se isto continuar a não ser suficiente para isolar um único aspecto, podemos utilizar ainda um outro critério e dizer que o principal responsável pela inconsistência é o aspecto responsável mais “inútil”, ou seja, aquele cuja eliminação resulta numa teoria que tem tanta (ou quase tanta) força dedutiva – no que respeita as *boas* consequências²⁸ – quanto a teoria original.²⁹ Finalmente, se todos estes critérios não forem suficientes para isolar claramente (entre os responsáveis) um único aspecto devemos simplesmente concluir que eles são responsáveis *em conjunto* e que não há um responsável *principal*.

Estabelecidos estes critérios, resta-nos aplicá-los aos aspectos suspeitos. A teoria que se obtém pela eliminação em **GG** do axioma (**v**) é, simplesmente, a lógica de segunda-ordem plena que é obviamente uma teoria consistente. O axioma (**v**) deve portanto ser incluído no grupos dos aspectos responsáveis. Por outro lado, dada a consistência de **GG**^{Pred*}, a impredicatividade de segunda-ordem também é um dos aspectos da teoria **GG** responsável pela sua inconsistência.

²⁸ Lembremo-nos que as *boas* consequências de **GG** são aquelas em cujas demonstrações não utilizamos o facto de GG ser inconsistente.

²⁹ Este critério é proposto por Boolos em “Whence the Contradiction”, p.235.

Tanto a impredicatividade de segunda-ordem quanto o axioma (**v**) podem portanto ser acusados de ser *responsáveis* pela inconsistência de **GG**. Mas será que um deles é o *principal* responsável? Aqui devemos apelar ao nosso segundo critério e determinar qual o comportamento destes aspectos quando estão presentes noutras teorias. Este critério revela-se, no entanto, de difícil aplicação: por um lado, existem muitas teorias de segunda-ordem impredicativas consistentes e, por outro, existem muitas teorias consistentes que incluem o axioma (**v**): não parece ser possível determinar (mesmo que aproximadamente) qual destes dois aspectos se comporta “pior” no contexto de outras teorias.

Resta-nos o último critério, o da inutilidade. Aqui a impredicatividade de segunda-ordem leva vantagem sobre o axioma (**v**): o fragmento predicativo de **GG** parece ser substancialmente mais forte do que a lógica de segunda-ordem plena: ele interpreta a teoria **Q**, ou seja, a teoria de primeira-ordem que tem como axiomas todos os axiomas de **PA2** à exceção do axioma de indução (**a_{ind}**) (ver Apêndice 2a): a impredicatividade de segunda-ordem é, portanto, mais inútil que o axioma (**v**).

Devemos então concluir que a culpa da inconsistência cai sobre a impredicatividade de segunda-ordem? Não imediatamente. É que em vez de considerarmos o axioma (**v**) como o aspecto “culpado” a ser eliminado, podemos tentar defender que o principal culpado é, não o axioma (**v**) *per se*, mas algum aspecto mais subtil deste axioma. Podemos por exemplo tentar enfraquecer o axioma (**v**) de uma ou de outra maneira e estudar as teorias resultantes. Se conseguirmos construir teorias consistentes e substancialmente mais fortes que o fragmento predicativo de **GG**, talvez pudéssemos, afinal, acusar um destes aspectos do axioma (**v**) de ser o *principal* responsável pela inconsistência e não a impredicatividade de segunda-ordem.

Por “enfraquecer” o axioma (**v**) entendemos a sua substituição por uma das suas boas consequências dedutivas (em lógica de segunda-ordem plena). No capítulo I.2 vimos que uma das boas consequências dedutivas do axioma (**v**) era o axioma (**ph**). No apêndice 1a demonstramos que a teoria **PH** (lógica de segunda-ordem plena mais o axioma (**ph**)) interpreta **PA2**. Segue-se que **PH** é uma teoria aparentemente mais forte (no que respeita a interpretação da aritmética) do que o fragmento predicativo de **GG**. Por outro lado, **PH** é consistente (ver Apêndice 1b). Temos portanto aqui um bom candidato, de acordo com os nossos critérios, para ser acusado de ser o *principal* responsável da inconsistência de **GG**, a saber, aquele aspecto do axioma (**v**) que o torna mais forte que o axioma (**ph**).

Em “Whence the Contradiction” Boolos encontra, no entanto, uma outra forma para enfraquecer o axioma (**v**) através da qual se obtém um axioma aparentemente ainda mais forte do que **PH** e que é consistente em lógica de segunda-ordem plena. Trata-se de restringir a atribuição de extensões (no sentido intuitivo do termo) a conceitos que satisfazem determinadas características, ou seja, a conceitos que não são demasiado “grandes” num sentido a ser especificado. Isto pode ser feito substituindo o axioma (**v**) pelo axioma

$$(\mathbf{v}^B): \quad \wedge F = \wedge G \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \vee F \approx [x: \neg Fx] \approx [x: x=x] \approx [x: \neg Gx] \approx G.$$

Chamemos à teoria de segunda-ordem plena mais o axioma (**v^B**), **GG^B**. Segundo o axioma (**v^B**), dois conceitos têm a mesma extensão se e só se ou são verdadeiros dos mesmos objectos ou são ambos equinumericos com o domínio e com os seus conceitos complementares (como Boolos nos diz, esta proposta resulta de um “entendimento de conjuntos sofisticado por anos de experiência e teoria”³⁰). Boolos chama os conceitos equinumericos com o universo e com os seus complementos

³⁰ G. Boolos, “Whence the Contradiction?”, p.235.

conceitos “maus”. Repare-se que este axioma atribui a todos os conceitos “maus” uma única extensão sejam estes verdadeiros dos mesmos objectos ou não. Face a este resultado é tentador dizer que o *principal* responsável pela inconsistência de **GG** é, afinal, aquele aspecto do axioma (v) que tenta atribuir uma extensão (no sentido intuitivo do termo) aos conceitos “maus”.

Terá Dummett perdido esta batalha? Não necessariamente. É que ao restringirmos o axioma de compreensão impredicativa a fórmulas sem quantificadores de segunda-ordem fomos longe demais. Afinal, tudo o que um predicativista exige é que fórmulas com quantificadores de segunda-ordem não possam ser utilizadas para definir conceitos que pertencem ao domínio de quantificação desses mesmos quantificadores: ele nada tem a objectar a que fórmulas com quantificadores de segunda-ordem sejam utilizadas na definição de conceitos, desde que estes conceitos não sejam incluídos no domínio desses quantificadores.

Por esta razão, a lógica predicativa *simples* não reflecte adequadamente a lógica filosófica predicativista. Faltam-lhe axiomas que garantam a existência de conceitos definidos através de fórmulas que contêm quantificações de segunda-ordem, ainda que não permitam a inclusão destes conceitos no domínio de quantificação dos quantificadores de segunda-ordem que ocorrem nessas fórmulas. Para distinguir estes conceitos dos anteriores chamamo-lhes “conceitos de tipo 1”, e aos anteriores “conceitos de tipo 0”.

À lógica predicativista *simples* devemos portanto adicionar o axioma esquemático de compreensão

$$\text{(comp-pred}^1\text{): } \exists F^1 \forall x (F^1 x \leftrightarrow A(x))$$

para todas as fórmulas $A(x)$ que contêm (explícita ou implicitamente³¹) no máximo quantificações de segunda-ordem sobre conceitos de tipo 0. Repare-se que fomos obrigados a introduzir um novo tipo de variáveis de segunda-ordem F^1, G^1, H^1 , etc. para conceitos de tipo 1 que se distinguem das variáveis de segunda-ordem habituais para conceitos de tipo 0 (às quais podemos acrescentar o índice 0): F^0, G^0, H^0 , etc.

Este processo pode agora ser repetido. Se $A(x)$ é uma fórmula que só contém (explícita ou implicitamente) quantificações de segunda-ordem de tipo 0 ou 1, então ela define um conceito que não pode ser incluído no seu domínio de quantificação e que, por conseguinte, deve ser distinto de todos os conceitos de tipo 0 e 1. Chamamos aos conceitos assim definidos “conceitos de tipo 2”. Em geral, chamamos aos conceitos definidos por fórmulas que só contêm (explícita ou implicitamente) quantificações de segunda-ordem de tipo inferior a n , “conceitos de tipo n ”.

À lógica predicativa *simples* devemos portanto adicionar todos os axiomas do género

$$(\text{comp-pred}^n): \exists F^n \forall x (F^n x \leftrightarrow A(x))$$

em que $A(x)$ é uma fórmula que contém no máximo quantificações de segunda-ordem de tipo $n-1$ ou predicados para conceitos de tipo n . Obtemos assim a lógica de segunda-ordem predicativa *ramificada*.

À primeira vista, a lógica predicativa ramificada parece ser substancialmente mais forte do que a lógica predicativa simples. Seria de esperar, por exemplo, que a teoria de lógica de segunda-ordem predicativa ramificada mais o axioma

³¹ Dizemos que uma fórmula contém implicitamente uma expressão se contém um predicado que foi definido à custa dessa expressão.

$$(v\text{-esq}): \quad \wedge A(x) \Rightarrow \wedge B(x) \leftrightarrow \forall x(A(x) \leftrightarrow B(x))$$

– chamemo-lhe \mathbf{GG}^{Ram} – fosse substancialmente mais forte (no que respeita a interpretação da aritmética) do que a teoria $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$. Isto, no entanto, não parece ser o caso. Apesar de podermos definir o conceito de número natural através da equivalência $\mathbf{Nat}^1 x \leftrightarrow_{\text{def}} \forall F^0 (\forall w(OPw \rightarrow F^0 w) \wedge P\text{-trans-}F^0 \rightarrow F^0 x) \vee x=0$, ou seja, definir o conceito de número natural como o conceito apenas verdadeiro dos números indutivos, a partir do zero, relativamente aos conceitos de tipo 0 mais o próprio zero, continua a não ser possível defini-lo como o conceito verdadeiro apenas dos números indutivos relativamente a *todos* os conceitos de *todos* os tipos. Este facto é importante porque o facto de os números naturais serem indutivos em relação a conceitos definidos à custa do próprio conceito de número natural é utilizado na interpretação de $\mathbf{PA2}$ em \mathbf{PH} pelo que não será possível reconstruir esta interpretação em \mathbf{GG}^{Ram} .³² Eliminar a impredicatividade de segunda-ordem é portanto uma medida demasiado drástica no que respeita a *boa* força dedutiva de \mathbf{GG} .

Será que existe uma outra estratégia que permita Dummett defender-se contra Boolos? De acordo com o raciocínio de Dummett, o problema com o axioma de compreensão impredicativa (**comp**) é que ele permite a definição de conceitos indefinidamente extensíveis, entre os quais o conceito de Russell \mathbf{R} que está na origem do Paradoxo de Russell. Se em vez de eliminar toda a compreensão impredicativa de \mathbf{GG} , Dummett se limitasse apenas a eliminar aquelas instâncias de (**comp**) que permitem a definição de conceitos indefinidamente extensíveis, talvez conseguisse obter um sistema consistente tão forte quanto $\mathbf{GG}^{\mathbf{B}}$ e no qual todas as

³² Ver, a este respeito, os parágrafos iniciais do Apêndice 2a.

fórmulas têm uma extensão, ou seja, no qual o axioma (**v-esq**) é válido.³³ Dummett poderia então continuar a localizar a origem da inconsistência de **GG** no carácter impredicativo do axioma (**comp**) e não no axioma (**v**) ou (**v-esq**) como Boolos pensa. Ele poderia argumentar que a “culpa” da inconsistência encontra-se no facto do axioma (**comp**) permitir a definição de conceitos indefinidamente extensíveis, e não no facto do axioma (**v-esq**) atribuir uma extensão a todos os conceitos.³⁴

³³ Evitamos aqui a difícil questão de como restringir formalmente a validade do axioma (**comp**) a fórmulas que não dão origem a conceitos indefinidamente extensíveis.

³⁴ Repare-se que tal como no sistema **GG**^{Pred*} de Heck, também neste sistema seria possível demonstrar a existência de extensões que não são extensões de nenhum conceito (ver nota de rodapé n.26).

CAPÍTULO III:

NEO-LOGICISMO

No capítulo anterior tentámos descobrir a origem da inconsistência de **GG**. Considerámos então várias teorias consistentes (resultantes de modificações em **GG**) e nas quais é possível interpretar alguma aritmética. Neste capítulo vamos tentar determinar até que ponto os axiomas de algumas destas teorias, ou de outras teorias obtidas a partir destas, podem ser interpretados como (alguma espécie de) verdades lógicas ou definições lógicas. Esta é uma questão fundamental para a qual um neo-logicista terá que encontrar uma resposta se pretender utilizar alguma destas teorias na defesa do seu projecto.³⁵

1. O Princípio de Hume: A teoria PH.

A primeira “emenda” de **GG** que vamos considerar é a teoria **PH** resultante da substituição do axioma (**v**) em **GG** pelo axioma (**ph**), ou seja, pelo Princípio de Hume. Esta teoria foi proposta por Crispin Wright no seu livro *Frege’s Conception of Numbers as Objects*.³⁶ Neste livro Wright tenta recuperar o programa logicista de Frege. A sua estratégia é simples. Partindo do pressuposto que algum aspecto do

³⁵ Uma outra questão fundamental para o neo-logicista, mas que não será discutida aqui, consiste em saber até que ponto as definições das expressões aritméticas mais básicas em cada uma destas teorias respeita o seu sentido tradicional.

³⁶ Crispin Wright, *Frege’s Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press, 1983.

axioma (**v**) é o *principal* responsável pela inconsistência, Wright propõe que se substitua este axioma pelo Princípio de Hume:

$$(\mathbf{ph}): \quad \#F=\#G \leftrightarrow F\approx G$$

que governa directamente a expressão-funcional “#”. Como vimos este axioma é interpretável em **GG** e a teoria de lógica de segunda-ordem cujo único axioma não lógico é (**ph**) – a teoria **PH** – é consistente e interpreta **PA2** (ver Apêndices 1a e 1b).

a) Será o axioma (**ph**) o resultado de uma análise do conceito *lógico* e *primitivo* de número cardinal?

Em *Funktion und Begriff*, Frege tinha-nos dito que a possibilidade de se interpretar uma frase do género $\lceil \forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \rceil$ como a igualdade particular $\lceil \wedge F = \wedge G \rceil$ é “indemonstrável” e “deve ser aceite como uma lei fundamental da lógica”.³⁷ Por que é que Frege, ao tomar conhecimento da inconsistência do seu sistema, não optou por substituir o axioma (**v**) pelo axioma (**ph**) e defender que este último é uma “lei fundamental da lógica”? Afinal os dois axiomas parecem ser estruturalmente idênticos: ambos estabelecem a equivalência entre a obtenção de uma relação de equivalência entre dois conceitos e a equação formada pelos termos que resultam da aplicação de um operador aos predicados que referem esses conceitos. Da mesma forma que o axioma (**v**) garante a existência de um objecto (uma extensão) para cada conceito tal que, a pares de conceitos não verdadeiros dos mesmos objectos correspondem extensões diferentes, (**ph**) garante a existência de um objecto (um número) para cada conceito tal que a pares de conceitos não

³⁷ G.Frege, *Funktion und Begriff* (1891). Tradução inglesa *Function and Concept* em P.Geach e M.Black (ed.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford, 1952.

equinumericos correspondem números diferentes. Por que é que Frege não optou por defender que a possibilidade de interpretarmos $[F \approx G]$ como $[#F = #G]$ é indemonstrável e deve ser aceite como uma lei fundamental da lógica?

Uma possível resposta é que o paralelismo entre os dois casos não é de todo exacto. No primeiro caso, Frege assume desde logo que o conceito de extensão é lógico, e que o axioma (v) apenas “capta” uma das suas características essenciais. No que respeita o conceito de número cardinal, pelo contrário, Frege não parte do princípio que este conceito é lógico. Ele *acredita* que este conceito é lógico, mas isto é algo que deverá ser demonstrado, começando por encontrar uma definição que o “reduza a algo de mais geral”:³⁸ o conceito será lógico se for possível defini-lo em termos de noções lógicas. É esta, portanto, para Frege, a diferença essencial entre os dois conceitos: o conceito de extensão é *indefinível* e *primitivo*, o de número cardinal é *definível* e *derivado*. Esta diferença implica, por seu lado, que o conceito de extensão pode ser visto, desde o início como um conceito lógico, ao passo que afirmações sobre a natureza epistemológica do conceito de número cardinal devem aguardar até que se encontre uma definição.

Dito isto, levanta-se a questão de saber por que é que Frege não levantou a hipótese do conceito de número cardinal ser ele próprio *primitivo* e *indefinível*. Nos *Grundlagen* Frege diz-nos que, dado o seu carácter universal, é “de esperar que as leis dos números estejam na mais íntima das ligações com as do pensamento”.³⁹ Não seria então possível defender que o conceito de número cardinal é um conceito lógico e primitivo e que (ph) limita-se a analisar este conceito sendo, portanto, uma

³⁸ G.Frege, *Os Fundamentos da Aritmética*, p.39.

³⁹ *ibid*, p.50.

verdade lógica primitiva? Parece-nos, além do mais, que esta posição seria bastante natural no quadro da filosofia de Frege.

Deve portanto existir uma outra razão para Frege não ter optado pela substituição do axioma (**v**) pelo axioma (**ph**) na sua defesa do logicismo. Talvez Frege se tenha convencido, ao confrontar-se com o resultado catastrófico do sistema **GG**, que o problema se encontrava não em algum aspecto específico ao axioma (**v**) mas na estrutura deste axioma, estrutura essa que é idêntica à do axioma (**ph**), e que, por esta razão, também (**ph**) iria acabar, mais tarde ou mais cedo, por dar origem a uma contradição.

Face à consistência de **PH**, no entanto, a hipótese de se interpretar o axioma (**ph**) como o resultado de uma análise do conceito *lógico* e *primitivo* de número cardinal permanece em aberto.

No entanto, na falta de um critério rigoroso que nos diga quando um determinado conceito é ou não um *conceito lógico*, a suposição que o conceito de número cardinal é um conceito lógico carece fundamentação. Não vamos aqui entrar numa discussão complexa sobre a definição da categoria *conceito lógico*, mas há que referir, a favor do logicista, que quem pretender excluir o conceito de número cardinal desta categoria terá que nos explicar porque é que, por exemplo, os conceitos de negação e de quantificação são lógicos e o de número cardinal não. Repare-se que todas as definições habituais de “conceito lógico”, viz. *conceito a priori*, *conceito aplicável em todos os ramos do saber*, *conceito essencial para a teoria da inferência*, implicam a classificação do conceito de número cardinal como um conceito lógico.

Uma outra crítica (levantada por George Boolos⁴⁰) à interpretação de **(ph)** como uma verdade lógica primitiva fundamenta-se na seguinte definição de “verdade lógica”: uma frase exprime uma verdade lógica de ordem n se for verdadeira em qualquer interpretação de uma linguagem de ordem n . Quem aceitar esta definição vê-se obrigado a concluir que o axioma **(ph)** não exprime uma verdade lógica pois é falso em interpretações cujo domínio de primeira-ordem é de cardinalidade finita (isto segue-se directamente do facto de **PA2** ser interpretável em **PH**). Será, no entanto, esta definição de verdade lógica correcta? É certo que ela capta um dos aspectos mais estruturantes da noção intuitiva de verdade lógica, a saber, que as verdades lógicas são independentes do assunto, aplicáveis em todos os ramos do saber, universais. Existem, no entanto, definições alternativas de verdade lógica que continuam a captar esta intuição mas que não implicam, como esta definição implica, a inexistência de objectos lógicos (i.e. objectos cuja existência é demonstrável a partir de verdades lógicas). Podemos por exemplo estipular que uma frase α exprime uma verdade lógica se é verdadeira em qualquer interpretação que contenha no seu domínio de primeira-ordem todos os objectos lógicos. Esta definição alternativa de verdade lógica continua a respeitar a intuição a que nos referimos sem no entanto excluir *a priori* a possibilidade de existirem objectos lógicos, exclusão esta que nos parece arbitrária.

⁴⁰ G. Boolos, “The Standard of Equality of Numbers” (1990) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.

b) Será o axioma (**ph**) uma definição contextual do conceito de número cardinal?

Sejam quais forem as razões filosóficas para classificar o conceito de número cardinal como um conceito lógico primitivo, o logicista pode aspirar a uma posição mais forte. Ao afirmar que o conceito de número cardinal é um conceito lógico primitivo o logicista afirma também que existe algo de específico à aritmética que a distingue da lógica de segunda-ordem plena. A aritmética seria então uma teoria *lógica* mais abrangente do que a lógica de segunda-ordem plena da mesma forma que esta é mais abrangente do que o cálculo proposicional. Uma versão mais forte do logicismo consiste em defender que a aritmética *não* é uma teoria mais abrangente do que a lógica de segunda-ordem plena mas, pelo contrário, é uma teoria interpretável nesta lógica, ou seja, uma teoria cujas constantes são definíveis e cujos axiomas (relativizados a algum predicado) são demonstráveis em lógica de segunda-ordem plena. É esta versão do logicismo que Crispin Wright, fundamentando-se na teoria **PH** e no Teorema de Frege, tenta defender em *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Como dissemos, a estratégia de Wright passa pela interpretação do axioma (**ph**) não como o resultado de uma análise mas como uma (espécie de) definição (lógica) do conceito de número cardinal.

Nos *Grundlagen* Frege introduz o que podemos chamar de Princípio do Contexto segundo o qual só se pode perguntar pelo sentido e referência de uma palavra no contexto de uma proposição.^{41,42} No que respeita a métodos de definição, este

⁴¹ G.Frege, *Os Fundamentos da Aritmética*, p.34.

⁴² Pare sermos exactos Frege aplica o Princípio do Contexto à noção de denotação e não às de sentido e referência. Quando escreveu os *Grundlagen* Frege ainda não tinha traçado a distinção entre

princípio levanta a possibilidade de se definir uma expressão através da definição do sentido de *frases* em que ela ocorre. Nos *Grundlagen* Frege diz-nos que este tipo de definição – definição contextual – é mesmo possível, pelo menos no que respeita nomes próprios: para que uma palavra *t* seja um nome próprio (refira um objecto) basta, segundo Frege, atribuir um sentido a todas as frases do género $\lceil t \text{ é o mesmo que } s \rceil$ em que *s* é um nome próprio.⁴³

Apresentados este princípios, Frege levanta a hipótese de **(ph)** ser uma definição do conceito de número cardinal.⁴⁴ A ideia de Frege é que ao atribuir um sentido a frases do género $\lceil \#F=\#G \rceil$ **(ph)** possa ser interpretado, à luz do Princípio do Contexto, como uma definição dos nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$ e, logo, da expressão “#”. Seria então possível definir o conceito **Card** de número cardinal através da equivalência “**Card** $x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F(x=\#F)$ ”.

i) O Problema de Júlio César

Surge, no entanto, segundo o próprio Frege, um problema.⁴⁵ É que **(ph)** só atribui sentido a frases do género $\lceil \#F=\#G \rceil$, ou seja, equações em que ambos os lados ocorre um nome próprio do género $\lceil \#F \rceil$. **(ph)** não atribui sentido a frases do género $\lceil \#F=\text{Júlio César} \rceil$, ou seja, equações em que um dos lados ocorre um nome próprio do género $\lceil \#F \rceil$ e no outro um termo de qualquer outro tipo. Segue-se que, à luz dos

sentido e referência. A noção de denotação desempenhava então de uma forma ambígua ambos os papéis que as noções de sentido e de referência vieram desempenhar mais tarde.

⁴³ *ibid*, p.84.

⁴⁴ *ibid*, p.84.

⁴⁵ *ibid*, p.86.

princípios de Frege, **(ph)** não pode por si só ser interpretado como uma definição (contextual) dos nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$, nem, por conseguinte, do conceito de número cardinal. Este problema ficou conhecido como o “Problema de Júlio César”.

À primeira vista este parece ser um problema de fácil resolução: basta estipular que *todas* as frases do género $\lceil \#F=t \rceil$, em que t não é do tipo $\lceil \#G \rceil$, são falsas, ou seja, não autorizar a identificação de um número cardinal com um objecto de qualquer outro tipo. No entanto, esta solução não satisfaz Frege. É que ao estipularmos que todas as frases do género $\lceil \#F=t \rceil$ são falsas estamos, segundo Frege, a assumir ilegitimamente que nenhum dos objectos referidos por nomes próprios de outro tipo que $\lceil \#F \rceil$ são números cardinais.⁴⁶ Se já existiam nomes próprios que referiam, antes de introduzirmos **(ph)**, número cardinais então alguma frase do género $\lceil \#F=t \rceil$ terá mesmo que ser verdadeira. Se já tivéssemos o conceito de número cardinal poderíamos estipular que $\lceil \#F=t \rceil$ é falsa se t não referir um número cardinal, caso contrário, se t refere o número cardinal de um conceito **C**, as condições de verdade de $\lceil \#F=t \rceil$ são as dadas por **(ph)**, ou seja, $\lceil F \approx C \rceil$. Formalmente:

$$\#F=t \leftrightarrow_{\text{def}} \exists C(\#C=t \wedge F \approx C).$$

Porém, uma vez que o conceito de número cardinal é justamente o conceito que procuramos definir, esta solução é circular.

Este último raciocínio revela, entretanto, com mais detalhe a forma como Frege vê, nos *Grundlagen*, o Problema de Júlio César e, mais especificamente, o tipo de definição que ele procura para os nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$. Em primeiro lugar,

⁴⁶ *ibid*, p.86.

Frege está a tomar em consideração todos os nomes próprios da linguagem e não, como seria hoje mais habitual, um conjunto restrito de nomes próprios de uma linguagem formal particular. Em segundo lugar, e mais importante, ele acredita que é possível alguns dos nomes próprios dessa linguagem referirem já, antes da definição, números cardinais.

Os objectivos de Frege nos *Grundlagen* devem portanto ser interpretados da seguinte forma. Ao definir as expressões do género $\lceil \#F \rceil$ Frege não procura *introduzir* na linguagem um conjunto *novo* de expressões com um *novo* sentido mas sim *analisar* o sentido de expressões que já pertenciam à linguagem e que já eram compreendidas. Dito numa terminologia Fregeana: com a definição das expressões do género $\lceil \#F \rceil$ Frege procura não uma definição *construtiva* mas uma definição *analítica*.⁴⁷ Exemplos de expressões do género $\lceil \#F \rceil$ que já pertenciam à linguagem são *o número dos satélites da Terra* ou *o número dos dias da semana*. Estas expressões têm já um sentido determinado que deverá ser respeitado pela definição analítica da expressão-funcional “#”. O que a definição procurará fazer é apresentar o sentido destas expressões de uma forma sistemática reduzindo-o a noções mais gerais e conceptualmente prioritárias.

É fácil ver como (ph) pode ser visto por Frege como (parte de) uma definição analítica *contextual* de expressões do género $\lceil \#F \rceil$. Como vimos no início deste capítulo, o sentido das expressões do género $\lceil \#F \rceil$ pode ser, segundo Frege, definido através do sentido das frases em que ocorrem. Ao apresentarmos o sentido

⁴⁷ G.Frege, “Logik in der Mathematik” (1914) em H.Hermes, F.Kambartel, F.Kaulbach (ed.), *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel*, vol I, Felix Meiner, Hamburg, 1969. Tradução inglesa “Logic in Mathematics” em *Gottlob Frege, Posthumous Writings*, trad. P.Long, R.White, Oxford University Press, 1979, p.210.

destas frases de uma forma sistemática reduzindo-o ao sentido de frases conceptualmente prioritárias, estaremos indirectamente (via o Princípio do Contexto) a construir uma definição analítica para estas expressões.

Torna-se agora mais claro como é que Frege entende nos *Grundlagen* o Problema de Júlio César. É que apesar da frase “o número dos satélites da Terra é Júlio César” ser obviamente falsa, (ph) nada nos diz acerca do seu sentido destas e não pode por isso ser interpretado como uma definição analítica contextual da expressão “o número dos satélites da Terra”, nem, pelas mesmas razões, de qualquer expressão do género $\lceil \#F \rceil$. Daí Frege dizer-nos que, apesar de ninguém confundir o famoso imperador romano com o número quatro, isso não é graças a (ph):⁴⁸ este axioma, apesar de conseguir sistematizar e reduzir o sentido de frases do género $\lceil \#F = \#G \rceil$ a “algo de mais geral” e de conceptualmente prioritário, falha na sistematização/redução do sentido de frases do género $\lceil \#F = t \rceil$ e não pode por isso ser interpretado como uma definição analítica contextual *completa* das expressões do género $\lceil \#F \rceil$.

Posto desta forma o Problema de Júlio César parece não afectar a hipotética definição contextual dos nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$ no âmbito da teoria PH pela simples razão que nesta teoria não existem nomes próprios de outro género. O problema, no entanto permanece pois se a teoria PH é suposta ser utilizada na defesa de teses logicistas, os nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$ devem ser entendidos como nomes próprios dos números cardinais que são utilizados não só em aritmética pura mas também em aritmética aplicada – como quando utilizamos raciocínios do género *Uma vez que cada folha tem duas páginas e que este livro*

⁴⁸ G.Frege, *Os Fundamentos da Aritmética*, p86.

tem 50 folhas então, dado que $2 \times 50 = 100$, este livro tem 100 páginas. Os nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$ devem portanto ser entendidos como pertencentes a uma linguagem mais abrangente do que a linguagem formal de **PH**.

Nos *Grundlagen* Frege não encontra qualquer solução para o Problema de Júlio César e acaba mesmo por desistir de uma definição contextual das expressões do género $\lceil \#F \rceil$ (através do axioma **(ph)**) optando por uma definição explícita em termos de extensões.⁴⁹

Segundo Wright, no entanto, este passo foi precipitado pois o Problema de Júlio César tem uma solução.⁵⁰ Wright acredita que, apesar de **(ph)** não explicar de uma forma directa o sentido de frases do género $\lceil \#F=t \rceil$, ele pode ser utilizado para explicar o sentido destas frases de forma *indirecta*. É que, segundo Wright, ao estipular que o que determina a identidade entre números cardinais é a existência de uma bijecção entre conceitos, **(ph)** exclui a hipótese de se identificar um número cardinal com Júlio César pois a existência ou não de uma bijecção entre certos conceitos é completamente irrelevante para determinar a identidade de uma pessoa, o que não seria o caso se Júlio César fosse um número. O mesmo raciocínio aplica-se, na opinião de Wright, a nomes de objectos de qualquer outra categoria:⁵¹ se o que determina a relação de identidade entre objectos da categoria δ não é a

⁴⁹ *ibid*, p.87.

⁵⁰ C.Wright, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, p.114.

⁵¹ Uma "categoria" é um conceito cujos critérios de identidade não podem ser definidos à custa dos critérios de identidade associados a um conceito mais abrangente. O conceito de humano, por exemplo, não é uma categoria uma vez que

x é o mesmo humano que $y \leftrightarrow x$ é humano $\wedge y$ é humano $\wedge x$ é o mesmo animal que y .

O conceito de animal, por sua vez, já é uma categoria.

existência de bijeções entre conceitos, então **(ph)** exclui a possibilidade de se identificarem objectos dessa categoria com números cardinais.

A forma “indirecta” como, segundo Wright, **(ph)** explica o sentido de frases do género $\lceil \#F=t \rceil$ é portanto a seguinte: se t refere um objecto de uma categoria δ tal que os valores de verdade de equações compostas por nomes próprios n e m de objectos de δ não são sistematicamente determinados por frases do género $\lceil N \approx M \rceil$, em que N e M são predicados associados a n e m respectivamente, então a frase $\lceil \#F=t \rceil$ é falsa. Se, pelo contrário, t refere um objecto de uma categoria δ com essas características, então o valor de verdade da frase $\lceil \#F=t \rceil$ é o mesmo que o da frase $\lceil F \approx T \rceil$ em que T é o predicado associado ao nome t .⁵²

Repare-se que, segundo a proposta de Wright, o conhecimento do sentido de **(ph)** não é *suficiente* para se chegar ao conhecimento do sentido de uma frase do género $\lceil \#F=t \rceil$. Para compreendermos uma frase deste género devemos também conhecer, para além de **(ph)**, pelo menos parte do sentido do nome próprio t . Em particular, devemos conhecer os critérios que determinam o valor de verdade de equações compostas por termos que referem objectos da categoria do referente de t . Ora isto parece-nos bastante natural. Não vemos qualquer razão porque uma definição (analítica ou não, contextual ou não) da uma expressão do género $\lceil \#F \rceil$ deva por si só explicar o sentido de uma frase como $\lceil \#F=t \rceil$ em que t é um nome próprio já compreendido: o conhecimento do sentido de t deve também, como é óbvio, ser utilizado na explicação do sentido desta frase.

⁵² *ibid*, p.114.

Em *Frege: Philosophy of Mathematics* Michael Dummett crítica a solução que Wright propõe para o Problema de Júlio César.⁵³ De acordo com Dummett a solução de Wright contradiz um princípio defendido pelo próprio Frege nos *Grundlagen*, nomeadamente o princípio segundo o qual não se pode interpretar a forma como um objecto foi introduzido como uma propriedade desse objecto pois isso seria “pressupor que um objecto só poderia ser dado de um único modo”.⁵⁴

Quanto a nós não é de todo claro que este princípio, da forma como Frege o entende, está em conflito com a proposta de Wright. O que nos interessa aqui, porem, não é tanto a forma correcta de interpretar Frege mas a opinião pessoal de Dummett. Visto como uma definição contextual (**ph**) parece ser um tipo de definição frequentemente utilizada em matemática, a saber, a definição das classes de equivalência relativas a uma determinada relação de equivalência. Segundo Dummett, neste tipo de definições devemos assumir a existência de um conjunto inicial de objectos “primários”.⁵⁵ É a partir destes objectos “primários” que podemos então definir i) ou uma relação de equivalência entre eles (por exemplo a relação de paralelismo entre rectas); ou ii) um conjunto de conceitos e uma relação de equivalência entre esses conceitos (por exemplo a relação de equinumeracidade entre conceitos). Uma vez definidas estas relações de equivalência, podemos finalmente definir um conjunto de objectos “secundários”, ou seja, os objectos que se chamariam, em matemática, “classes de equivalência”. No caso de (**ph**) definimos os números cardinais (objectos “secundários”) através da relação de equivalência de equinumeracidade entre conceitos (compostos por objectos “primários”). No caso do

⁵³ M.Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, p.159-166.

⁵⁴ G.Frege, *Os Fundamentos da Aritmética*, p.87.

⁵⁵ M.Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, p.163.

conceito de direcção, definimos a direcção de uma recta (objecto “secundário”) através da relação de equivalência de paralelismo entre rectas (objectos “primários”):

Direcção da recta r_1 = Direcção da recta $r_2 \leftrightarrow r_1$ é paralela a r_2 .

Dito isto, Dummett diz-nos que nada nos impede de identificar um destes objectos “secundários” com um objecto “primário”.⁵⁶ Nada nos impede, por exemplo, de identificarmos a direcção de uma recta r com uma recta particular desde que, como é óbvio, identifiquemos a direcção de todas as rectas paralelas a r com a essa mesma recta. Ora na medida em que as condições de verdade de equações compostas por nomes de rectas não “dependem” de factos sobre paralelismo, este tipo de identificação não é autorizado por Wright, o que demonstra, segundo Dummett, a falsidade da sua posição.

Em relação à posição de Dummett devemos referir o seguinte. Apesar de ser *consistente*, no sentido em que não gera quaisquer contradições, identificar a direcção de uma recta r (e a direcção de todas as rectas paralelas a r) com uma recta particular, isto não significa que tal identificação é *correcta*. Também seria *consistente*, e pelas mesmas razões, identificar a direcção da recta r (e a direcção de todas as rectas paralelas a r) com a Inglaterra e identificar o número quatro, por exemplo, com Júlio César. O problema é que, apesar de *consistentes*, identificações deste género resultam num conjunto de consequências indesejáveis. Se o número quatro fosse Júlio César, por exemplo, frases como “ $2+2$ =Júlio César”, “o número quatro foi assassinado com um punhal nas costas”, “o número quatro é um mamífero”, etc. teriam que ser verdadeiras. Este tipo de situação, apesar de consistente, parece-nos quanto a nós de evitar, tanto que não vemos qualquer

⁵⁶ *ibid*, p.164.

utilidade (para além de uma hipotética economia ontológica) na identificação da direcção de uma recta com uma recta particular nem com a identificação de um número com uma pessoa.

Repare-se entretanto que Dummett está de acordo com Wright no que respeita a não autorização da identificação trans-categórica de objectos “primários” entre si. Segundo Dummett, este tipo de identificação, para além de inútil, resultaria numa grande confusão.⁵⁷ Para suportar a sua posição Dummett dá-nos o seguinte exemplo. Considerem-se as duas categorias *letra-do-alfabeto* e *inscrição-de-letra*, distinguíveis pelo facto de a palavra “jejum” ser composta por *quatro* letras-do-alfabeto mas por *cinco* inscrições-de-letras. Suponhamos que identificamos a letra-do-alfabeto “j” com a inscrição-de-letra “j”. Então a questão *Qual a origem histórica da terceira inscrição-de-letra da palavra “jejum”?* que seria, habitualmente, uma questão *sem* sentido, passava agora a ser uma questão *com* sentido. Dummett conclui que identificações trans-categóricas de objectos “primários” não devem ser permitidas, sem se aperceber, no entanto, que uma confusão semelhante ocorre quando se identificam objectos “secundários” com objectos “primários”, tal como vimos no parágrafo anterior.

Existem outros problemas com a crítica de Dummett, nomeadamente, a sua distinção entre objectos “primários” e objectos “secundários”. O sucesso desta distinção é essencial para a posição de Dummett pois é através dela que ele traça a fronteira entre as identificações trans-categóricas permitidas e as não permitidas. Repare-se que, à primeira vista, a distinção de Dummett parece ser *relativa* a um determinado sistema de definições: se tivéssemos optado por começar com um conjunto que incluía, desde o início, os números cardinais e definir a partir daí uma

⁵⁷ *ibid*, p.163-164.

série de relações de equivalência e de objectos “secundários”, os números cardinais seriam classificados como objectos “primários”. Seria então impossível, afinal, identificar o número quatro com Júlio César.

Contra isto Dummett provavelmente argumentaria que não somos livres de escolher um ou outro sistema de definições: existem sistemas de definições *correctos* e sistemas de definições *incorrectos*. Em qualquer sistema *correcto*, objectos “concretos” do género Júlio César e a Terra deverão ser classificados como objectos “primários” enquanto que objectos “abstractos” como direcções e números cardinais deverão ser classificados como objectos “secundários”. Mas quais são então os critérios para a correcção de um sistema de definições?

Não vamos aqui discutir as ramificações deste problema. No entanto, supondo que Dummett consegue, no final do dia, traçar a distinção pretendida entre objectos “primários” e “secundários”, ao autorizar a identificação de um objecto “secundário” como a direcção de uma recta r com um objecto “primário” como uma recta s , ele vai se ver confrontado com o seguinte dilema: é que a partir do momento em que estipulamos a identificação, a direcção de r passa a ser *simultaneamente* um objecto “secundário” e um objecto “primário”, o que parece ser contraditório.

Devemos portanto concluir que as críticas de Dummett à solução de Wright do problema de Júlio César não são válidas e que a solução de Wright é correcta.

ii) As críticas intuicionistas de Dummett

Em *Frege: Philosophy of Mathematics* Michael Dummett desenvolve outro tipo de críticas à interpretação de **(ph)** como uma definição contextual do conceito de número cardinal. De acordo com Dummett, ao tentar utilizar o axioma **(ph)** para introduzir os nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$, Wright está a tentar fazer uma tarefa

impossível, a saber, “fixar o sentido de equações e, simultaneamente, fixar o domínio de primeira-ordem da linguagem”.⁵⁸

Esta crítica de Dummett deve ser entendida à luz da sua discussão sobre a impredicatividade de segunda-ordem que ocorre algumas páginas antes no mesmo livro.⁵⁹ Como vimos, dizemos que uma teoria é impredicativa no que respeita a segunda-ordem se permitir explicitamente através dos seus axiomas definições impredicativas de conceitos. Suponhamos que $A(x)$ é uma fórmula de uma linguagem de segunda-ordem na qual ocorrem quantificadores de segunda-ordem. Suponhamos que queremos definir, numa determinada teoria T da linguagem L , um conceito verdadeiro apenas dos objectos dos quais $A(x)$ é verdadeira. Será que existe um tal conceito? A resposta será afirmativa se conseguirmos demonstrar que T implica $\exists F \forall x (Fx \leftrightarrow A(x))$. Ora se a lógica subjacente à teoria T é a lógica de segunda-ordem *plena*, da qual faz parte o axioma (**comp**), a resposta será necessariamente afirmativa. Segue-se que todas as teorias de segunda-ordem cuja lógica é plena permitem *explicitamente* através dos seus axiomas definições impredicativas de conceitos e são, por conseguinte, teorias impredicativas.

Repare-se que ao assumirmos a validade do axioma (**comp**) no contexto da lógica de segunda-ordem estamos implicitamente a decretar que o domínio de segunda-ordem de uma interpretação não pode ser definido de uma forma *qualquer*, ou seja, não temos total liberdade para estipular quais os conceitos que pertencem ou não a este domínio: o domínio terá que conter conceitos *suficientes* para validar o axioma de compreensão.

⁵⁸ Ibid, p.236.

⁵⁹ p.226.

Suponhamos agora que temos uma linguagem L de *primeira-ordem* para a qual já temos uma interpretação. Dada uma qualquer fórmula $A(x)$ de L já sabemos, por suposição, se ela é ou não verdadeira (na interpretação dada) de um qualquer objecto. Isto implica, segundo Dummett, que implícito no nosso conhecimento da linguagem L e da sua interpretação encontra-se um método para determinar um domínio de segunda-ordem, a saber, estipular que o domínio consiste em todos os conceitos definíveis através de fórmulas de primeira-ordem de L . Segue-se que a introdução dos quantificadores de segunda-ordem na linguagem é, de certa forma, “auto-explicativa”: podemos simplesmente estipular que uma frase do género $\lceil \exists F A(F) \rceil$, em que $A(F)$ é uma fórmula em que a variável de segunda-ordem “ F ” ocorre livre, é verdadeira se e só se existir uma fórmula $B(x)$ da linguagem de primeira-ordem tal que a frase $\lceil A(B(x)) \rceil$ é verdadeira, e que uma frase do género $\lceil \forall F A(F) \rceil$ é verdadeira se e só se para todas as fórmulas de primeira-ordem $B(x)$ a frase $\lceil A(B(x)) \rceil$ é verdadeira. Esta estipulações seriam suficientes para justificar a validade do axioma de compreensão *predicativo* (**comp-pred**).

Ora, o mesmo não acontece se quisermos justificar a validade do axioma de compreensão *impredicativo* (**comp**) e utilizar fórmulas que contêm quantificadores de segunda-ordem na definição de conceitos pertencentes ao domínio desses quantificadores. O problema é que se estipulamos, à semelhança do caso predicativo, que uma frase do género $\lceil \forall F A(F) \rceil$ é verdadeira se e só se para todas as fórmulas de primeira e *segunda-ordem* $B(x)$ a frase $A(B(x))$ é verdadeira, entramos num círculo vicioso e não seremos capazes de determinar o valor de verdade de $\lceil \forall F A(F) \rceil$. A razão é que para determinar o valor de verdade desta frase devemos determinar o valor de verdade de frases em que a própria frase ocorre

como sub-frase, o que é impossível se não conhecermos de antemão o valor de verdade da frase inicial.

Repare-se que este raciocínio não demonstra, e Dummett está de acordo conosco neste ponto, a *incorrecção* da quantificação de segunda-ordem impredicativa mas apenas que esta não pode ser explicada com a mesma facilidade que a quantificação predicativa. Existe na realidade um método “clássico” para explicar a quantificação de segunda-ordem impredicativa, método esse que parte da concepção de uma totalidade de conceitos entendidos como atribuições arbitrárias de valores de verdade a todos os objectos de um domínio dado. Se assumirmos a validade e consistência desta concepção podemos estipular que uma frase do género $\lceil \forall F \mathbf{A}(F) \rceil$ é verdadeira se e só se a fórmula $\mathbf{A}(F)$ é verdadeira de todos os conceitos pertencentes a esta totalidade e que uma frase do género $\lceil \exists F \mathbf{A}(F) \rceil$ é verdadeira se e só se a fórmula $\mathbf{A}(F)$ é verdadeira de pelo menos um conceito pertencente a esta totalidade. Dummett diz-nos que o que lhe interessa aqui não é propriamente saber se esta concepção de uma totalidade de conceitos é ou não aceitável, o que lhe importa frisar é que a quantificação de segunda-ordem predicativa é, ao contrário da impredicativa, “auto-explicativa”.⁶⁰

Uma diferença importante entre um predicativista e um impredicativista de segunda-ordem é portanto, na opinião de Dummett, que o predicativista tem mais facilidade em explicar a quantificação de segunda-ordem do que o impredicativista uma vez que o primeiro têm um método muito simples para delimitar o domínio de segunda-ordem, método esse que não funciona para o segundo. Ao contrário do predicativista, que pode simplesmente dizer que o seu domínio de segunda-ordem consiste em todos os conceitos definíveis através de fórmulas de primeira-ordem, o

⁶⁰ p.228.

impredicativista vê-se obrigado a encontrar um método diferente para delimitar o seu domínio de quantificação de segunda-ordem. Repare-se, entretanto, que este acrescento no trabalho do impredicativista vai trazer-lhe uma vantagem: ao contrário do predicativista ser-lhe-á *sempre* legítimo definir um conceito à custa de quantificações de segunda-ordem e os seus sistemas serão, portanto, sempre mais fortes.

A discussão de Dummett restringe-se à impredicatividade das quantificações de segunda-ordem. Existe no entanto um problema análogo com os quantificadores de primeira-ordem.⁶¹ Dizemos que uma definição de um conceito é impredicativa quando ocorrem no *definiens* quantificadores de segunda-ordem em cujo domínio esse mesmo conceito está incluído. Paralelamente, podemos dizer que uma definição de um objecto é impredicativa se no *definiens* ocorrem quantificadores de primeira-ordem em cujo domínio esse mesmo objecto está incluído. Aqui as diferenças entre as posições do predicativista e do impredicativista não são tão fáceis de encontrar. A situação é, no entanto, paralela. No caso de segunda-ordem tínhamos começado com uma linguagem de primeira-ordem L e com uma interpretação para esta linguagem. Se o predicativista se tinha fundamentado na linguagem L e nas suas regras de construção de fórmulas para, através da interpretação, delimitar um domínio de segunda-ordem, o impredicativista fundamentava-se no domínio de primeira-ordem da interpretação para definir, através da concepção da totalidade de atribuições arbitrárias de valores de verdade a todos os objectos pertencentes a este domínio, o seu domínio de segunda-ordem. Agora, no entanto, não podemos assumir o conhecimento de uma linguagem de

⁶¹ A importância da distinção entre impredicatividade de primeira-ordem e impredicatividade de segunda-ordem foi-me apontada por Fernando Ferreira.

primeira-ordem interpretada uma vez que o que se vai querer explicar é, justamente, o sentido dos quantificadores de primeira-ordem, expressões estas que já pertencem à linguagem. Podemos, no entanto, assumir o conhecimento de uma linguagem de primeira-ordem sem quantificadores (à qual podemos chamar “linguagem de ordem zero”), ou seja, uma linguagem que contém apenas, para além das constantes lógicas do cálculo proposicional e de um símbolo para a igualdade, um conjunto de nomes próprios, um conjunto de predicados, um conjunto de expressões-relacionais e um conjunto de expressões-funcionais. Podemos assumir também que conhecemos uma interpretação para esta linguagem. Esta seria, na realidade, a situação paralela à proposta por Dummett na sua discussão da quantificação de segunda-ordem. Partindo destes pressupostos podemos agora distinguir a posição do predicativista de primeira-ordem da do impredicativista de primeira-ordem de uma forma semelhante à utilizada por Dummett no caso da segunda-ordem. Tal como o predicativista de segunda-ordem, o predicativista de primeira-ordem tem à sua disposição um método “auto-explicativo”, utilizando o termo de Dummett, para definir o seu domínio de primeira-ordem: ele poderá estipular que o domínio de primeira-ordem consiste em todos os objectos definíveis por expressões da linguagem.⁶² Tal como no caso de segunda-ordem, esta estratégia explicativa não pode ser utilizada por um impredicativista pois ela não é suficiente para justificar a validade de definições de objectos impredicativas. Mais

⁶² Repare-se que saber quais são os objectos ou os conceitos definíveis através de uma dada linguagem interpretada, não é de todo uma tarefa fácil: tudo dependerá da nossa teoria de definição. O predicativista de segunda-ordem, ao aceitar unicamente a existência de conceitos definíveis por fórmulas de primeira-ordem tem uma solução prática para este problema pois é fácil compreender como é que cada uma destas fórmulas define um conceito *seja qual for* a interpretação. O problema é mais complexo para a primeira-ordem onde não parece existir uma estratégia tão simples.

uma vez, o impredicativista terá que recorrer a um método independente, agora para delimitar o domínio de primeira-ordem.

Até agora apenas consideramos definições *explícitas*, ou seja, definições em que atribuímos um sentido ao *definiendum* de uma forma directa identificando-o com o sentido de uma outra expressão – o *definiens* – que se assume já conhecida e compreendida. O mesmo raciocínio aplica-se no entanto ao método de definição contextual. Podemos dizer que uma definição contextual de uma série de nomes próprios n_i é impredicativa se as frases através das quais atribuímos sentido às equações do género $[n_i = n_j]$ contêm quantificadores de primeira-ordem em cujo domínio os referentes dos nomes n_i são supostos pertencer. Ora, este género de definição só poderá funcionar se for possível determinar o sentido daquelas frases sem recorreremos aos nomes próprios n_i que estamos a tentar introduzir, ou seja, devemos encontrar um método independente *não predicativista* para determinar o domínio de quantificação dos quantificadores de primeira-ordem.

Face a estas considerações sobre a impredicatividade, torna-se mais fácil compreender a crítica de Dummett à interpretação de **(ph)** como uma definição. Repare-se que **(ph)** pretende ser, antes de mais, uma definição *contextual* de todos os nomes próprios do género $[#F]$. É a partir dos nomes próprios deste género que se torna possível definir o conceito de número cardinal através da fórmula “**Card** $x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F(x = \#F)$ ” e, posteriormente, o conceito de número natural através da fórmula “**Nat** $x \leftrightarrow_{\text{def}} \mathbf{0P}^*x \vee x = \mathbf{0}$ ”. Ora, uma vez que Wright pretende, por um lado, incluir os números cardinais no domínio dos quantificadores de primeira-ordem que ocorrem no lado direito de **(ph)**, e por outro, incluir o conceito de número natural no domínio dos quantificadores de segunda-ordem que se encontram no início deste axioma, devemos concluir que **(ph)** é *duplamente* impredicativo: a impredicatividade

é de primeira-ordem quando **(ph)** é interpretado como uma definição dos números cardinais individuais e é de segunda-ordem quando **(ph)** é interpretado, em conjunto com as fórmulas “**Card** $x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F(x = \#F)$ ” e “**Nat** $x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists P^*x \vee x = 0$ ” como uma definição do conceito de número natural.

Até aqui tudo bem: Dummett não tem, como vimos, nada a apontar às definições impredicativas (de primeira ou segunda-ordem) por si só. O problema desta definição está, e é este o ponto fulcral da crítica de Dummett, na forma como Wright tenta delimitar os domínios dos quantificadores (de primeira e segunda-ordem) que ocorrem em **(ph)**. Se a definição fosse *predicativa* não seria necessário, na opinião de Dummett, delimitar os domínios de quantificação: poderíamos assumir que o domínio de quantificação de primeira-ordem consistia em todos os objectos definíveis por intermédio de expressões que não contêm quantificadores de primeira-ordem e que o domínio de quantificação de segunda-ordem consistia em todos os conceitos definíveis por fórmulas da linguagem que não contêm quantificadores de segunda-ordem: a quantificação seria, nas palavras de Dummett, “auto-explicativa”. No entanto, face à (dupla) impredicatividade de **(ph)** este caminho está fechado. O problema é que, segundo Dummett, é exactamente este o caminho que Wright tenta tomar para delimitar ambos os domínios de quantificação: fixar o domínio de quantificação de primeira-ordem à moda *predicativista* estipulando que este consiste em todos os objectos definíveis por expressões da linguagem (entre as quais os nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$ que estão a ser definidos à custa de quantificações de primeira-ordem), e fixar o domínio de segunda-ordem também à moda *predicativista* estipulando que este é constituído por todos os conceitos definíveis por fórmulas da linguagem (entre as quais o predicado “**Nat**” definido, ele

próprio, à custa de quantificações de segunda-ordem)⁶³. Daí Dummett dizer-nos que Wright tenta fazer algo impossível: “fixar o sentido de equações” (i.e. definir contextualmente os nomes próprios do género $[\#F]$ utilizando para o efeito quantificadores de primeira-ordem) “e, simultaneamente, fixar o domínio de primeira-ordem da linguagem” (utilizando para o efeito os nomes próprios que estão a ser definidos). Dummett podia acrescentar, de acordo com o seu próprio raciocínio, que Wright tenta fazer outra tarefa impossível: definir o predicado “**Nat**” utilizando para o efeito quantificações de segunda-ordem e, simultaneamente, utilizar este predicado na delimitação do domínio desses mesmos quantificadores.

Devemos portanto concluir que a crítica de Dummett à interpretação de Wright de **(ph)** como uma definição dirige-se não à impredicatividade *per se*, mas à forma como Wright tenta delimitar ambos os domínios de quantificação dado o carácter (duplamente) impredicativo de **(ph)**. Dummett acusa a definição não de ser impredicativa mas de ser “circular” no sentido que pressupõe os recursos conceptuais que pretende introduzir.⁶⁴ É certo que a razão porque a definição é circular prende-se com o seu carácter impredicativo, mas a impredicatividade não é por si só, de acordo com o raciocínio de Dummett, razão *suficiente* para a rejeitar em definitivo.

O raciocínio de Dummett parece-nos perfeitamente claro. Se pretendemos definir uma expressão **E** através de uma expressão **F** (ou de um conjunto de expressões **F_i** no caso da definição ser contextual) devemos assumir que o sentido de **F** (ou de todas as **F_i**) já está determinado. Em particular, se **F** (ou as **F_i**) contém

⁶³ Dummett parece restringir a sua crítica à componente de primeira-ordem. No entanto, o mesmo raciocínio aplica-se à componente de segunda-ordem.

⁶⁴ Ibid, p.236.

quantificadores (de primeira ou segunda-ordem), deve ser possível especificar sobre o que estes quantificadores quantificam pois sem uma especificação deste género será ilícito assumir que F (ou as F_i) tem um sentido determinado. Se, no entanto, não for possível especificar sobre o que se está a quantificar sem recorreremos à expressão E nem ao sentido que lhe estamos a tentar atribuir, a definição é circular e deverá ser rejeitada.

Isto deixa Wright com duas hipóteses distintas: ou interpreta o axioma (**ph**) e a definição do predicado “**Nat**” como definições *predicativas* excluindo os referentes dos nomes próprios do género $[\#F]$ do domínio de primeira-ordem e o conceito de número natural do domínio de segunda-ordem, ou encontra métodos independentes *não predicativistas* para delimitar os domínios de quantificação de primeira e segunda-ordem.

Para interpretar a aritmética de segunda-ordem é necessário, entre outras coisas, demonstrar a existência de um número infinito de objectos, viz. os números naturais. Isto é feito, em **PH**, definindo o zero como o número do conceito vazio e, para cada número n , definindo o número $n+1$ como o número dos números que precedem ou são idênticos a n , demonstrando de seguida que todos estes números são diferentes. É portanto essencial, nesta demonstração, que os números possam eles próprios “ser contados”, ou seja, que existam conceitos da teoria verdadeiros dos números. Mas isto só é possível se assumirmos que os números pertencem ao domínio de primeira-ordem. Por outro lado, também é essencial para o sucesso da interpretação da aritmética de segunda-ordem em **PH** assumir que o conceito de número natural existe, ou seja, que pertence ao domínio de segunda-ordem da teoria.⁶⁵

⁶⁵ Ver, a este respeito, os parágrafos iniciais do Apêndice 2a.

Face ao raciocínio de Dummett, Wright fica portanto com apenas uma hipótese: encontrar um método para delimitar um domínio de primeira-ordem (que inclua todos os números naturais) e um domínio de segunda-ordem (que inclua o conceito de número natural) sem recorrer aos nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$ nem ao predicado “**Nat**”. Ora, Dummett não vê como isto possa ser feito e conclui que “o problema do que é que constitui um método legítimo para especificar o domínio pretendido de uma teoria matemática fundamental (...) permanece sem solução”.⁶⁶

Num artigo recente Crispin Wright tenta responder a esta crítica de Dummett.⁶⁷ Wright concorda com Dummett em como a interpretação de **(ph)** como uma definição impredicativa exige que se encontre um método independente não predicativista para determinar o domínio de primeira-ordem. Mas Wright acredita que este método existe: basta interpretar os quantificadores de primeira-ordem como quantificando sobre literalmente *todos* os objectos que existem.⁶⁸

É claro que esta posição de Wright só é viável se aceitarmos a validade de quantificações irrestritas deste género, o que Dummett não parece estar pronto a fazer. Em *Frege: Philosophy of Language*⁶⁹ Dummett diz-nos uma das “lições” dos paradoxos da teoria dos conjuntos foi que nem o conjunto de todos os conjuntos nem o conjunto de todos os ordinais existem. Dado um conjunto de ordinais (ou de conjuntos) é sempre possível construir um ordinal (ou conjunto) que não pertence a esse conjunto. Isto implica que tanto o conceito de conjunto como o conceito de

⁶⁶ Ibid. p.235.

⁶⁷ C. Wright, “Response to Dummett” em Matthias Schirn (ed.) *Philosophy of Mathematics Today*, Oxford University Press, 1998.

⁶⁸ Ibid, p.393-394.

ordinal são, para usar as palavras de Dummett, “conceitos indefinidamente extensíveis”, ou seja, conceitos cujas extensões não pertencem aos seus próprios domínios de aplicação. Mas isto implica que o próprio conceito de objecto é indefinidamente extensível e que as quantificações sobre este conceito – quantificações irrestritas – são, na opinião de Dummett, sem sentido.

Mais recentemente, Richard Cartwright⁷⁰ e George Boolos⁷¹ desenvolveram argumentos a favor das quantificações irrestritas. O problema com a posição de Dummett, segundo estes filósofos, é a sua aceitação implícita do que Cartwright chama de “princípio dos todos-em-um”⁷², segundo o qual, para que uma frase com um quantificador tenha um sentido determinado é *necessário* que os objectos do domínio de quantificação formem uma extensão (ou conjunto) determinada. Ora, Cartwright e Boolos acreditam que isto é “pedir de mais”: para que a frase *Existe um objecto com uma altura superior a cinco metros* tenha um sentido determinado basta estipular que estamos a quantificar sobre *todas as árvores*, por exemplo, ou sobre *todos os prédios de Lisboa*, ou até sobre *todos os objectos que existem*. A mera enunciação de um conceito é, portanto, *suficiente*, segundo estes filósofos, para determinar o sentido de uma frase que contém quantificadores de primeira-ordem (assumindo, é claro, que todas as outras expressões que compõem a frase têm um sentido determinado): não é necessário, em particular, que os objectos dos quais o

⁶⁹ Michael Dummett, *Frege: Philosophy of Language*, Harvard University Press, Cambridge Mass., 1973. p.476 (2ª edição).

⁷⁰ Richard Cartwright, “Speaking of Everything” em *Noûs* 28:1, 1-20, 1994.

⁷¹ George Boolos, “Whence the Contradiction?” em *Aristotelian Society Supplementary*, vol.67, 1993.

⁷² Richard Cartwright, “Speaking of Everything”, p.7.

conceito é verdadeiro formem uma extensão, um conjunto ou outra espécie de objecto.

A posição de Dummett relativamente a esta questão e ao princípio de todos-em-um é, no entanto, mais complexa e fundamenta-se, antes de mais, numa crítica à noção Fregeana de sentido segundo a qual o sentido de uma frase é identificado com as suas condições de verdade. Segundo Dummett, esta concepção “platonista” da noção de sentido é insustentável em matemática devendo ser substituída por uma concepção de carácter “intuicionista” segundo a qual conhecer o sentido de uma frase é “ter a capacidade para reconhecer uma sua demonstração [ou da sua negação], quando esta nos é apresentada”.⁷³ Repare-se que, ao passarmos de uma concepção platonista do sentido para uma concepção intuicionista é a própria noção de verdade que se altera: se, para o platonista, uma frase era verdadeira se e só se as suas condições de verdade fossem satisfeitas, para um intuicionista uma frase é verdadeira se e só se ela puder ser demonstrada. No seu artigo *The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic*⁷⁴, escrito 18 anos antes de *Frege: Philosophy of Mathematics*, fundamentando-se no pensamento de Wittgenstein, Dummett explica-nos as razões para rejeitarmos a concepção “platonista” (Fregeana) do sentido de uma frase. Não vamos entrar aqui nas ramificações desta questão, queremos apenas salientar o posicionamento intuicionista de Dummett em relação a esta questão.

A diferença entre a concepção de sentido platonista e a concepção intuicionista revela-se em matemática quando consideramos o sentido de frases para as quais

⁷³ Michael Dummett, “The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic” em *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London, 1978.

⁷⁴ Ibid.

sabemos que não existe qualquer demonstração nem da sua verdade nem da sua falsidade, ou seja, o sentido de frases indecidíveis. Ao identificar o sentido destas frases com as suas condições de verdade, o platonista pode continuar a assumir a validade da lei do terceiro excluído segundo a qual todas as frases ou são verdadeiras ou falsas. É que apesar de não existir nenhum método para determinar o valor de verdade das frases indecidíveis, e de sabermos de antemão que nunca iremos conhecer os seus valores de verdade, o platonista acredita que estas frases têm condições de verdade precisas e que a “realidade matemática” determinará por si só, independentemente do nosso conhecimento, se estas condições são ou não satisfeitas e se as frases são ou não verdadeiras.

Em relação às frases indecidíveis o intuicionista encontra-se numa posição mais difícil. Uma vez que, por assunção, estas frases não podem ser demonstradas nem refutadas, e uma vez que o intuicionista não tem o apoio de uma “realidade matemática” independente que determine os seus valores de verdade, ele não vai poder assumir, como o platonista assumia, que as frases indecidíveis são ou verdadeiras ou falsas, ou seja, ele não tem qualquer tipo de justificação para a lei do terceiro excluído que terá, portanto, que ser rejeitada.

Qual é, segundo Dummett, a relação entre estas considerações acerca das noções de sentido e de verdade e o tipo de especificação que é *suficiente* para determinar o sentido de uma frase com quantificadores de primeira-ordem? A relação é esta: se o conceito através do qual especificamos aquilo sobre o que estamos a quantificar for indefinidamente extensível, não poderemos, segundo Dummett, garantir que *todas* as frases com quantificadores de primeira-ordem são decidíveis o que implica, assumindo que as noções intuicionistas de sentido e de verdade são as mais adequadas para a matemática, que a lei do terceiro excluído deve ser rejeitada. Daí Dummett dizer-nos que “quando o domínio é demasiado

grande, por exemplo, (...) quando é visto como (...) a totalidade de todos os objectos, (...) a primeira lição da descoberta dos paradoxos da teoria dos conjuntos é que as quantificações sobre esse domínio não podem ser vistas como resultando, sempre, em frases com um valor de verdade determinado”.⁷⁵ Daí também Dummett dizer-nos, no último capítulo de *Frege: Philosophy of Mathematics*, referindo-se à forma como Frege utiliza impredicativamente o axioma (**v**) para introduzir os nomes próprios do género $\lceil \wedge F \rceil$, que “a sua falha em inquirir sobre a validade da lógica clássica, quando aplicada a teorias matemáticas, é a grande lacuna (...) na sua filosofia da matemática”.⁷⁶

O raciocínio de Dummett pode ser resumido da seguinte forma. Se os objectos que pertencem ao domínio de primeira-ordem não formarem um conjunto (extensão) determinado, existirão frases do género $\lceil \forall x A(x) \rceil$ que não podem ser nem demonstradas nem refutadas. Ora, face ao carácter intuicionista das noções de sentido e de verdade que devemos usar em matemática, será ilícito assumir a validade do princípio do terceiro excluído para estas frases.

Com a quantificação irrestrita Wright pensava ter encontrado um método não predicativista para delimitar o domínio de primeira-ordem, método esse que legitimaria a validade de definições impredicativas (contextuais ou não) do género de (**ph**). O problema é que ao tomar esta opção Wright será obrigado, na opinião de Dummett, a rejeitar a lei do terceiro excluído e a reconstruir toda a interpretação de **PA2** em **PH** sem esta lei, o que não parece ser possível.

No que respeita a forma como delimitar um domínio de segunda-ordem Wright irá supostamente defrontar-se com um problema semelhante. A definição do conceito

⁷⁵ M.Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, p.516.

⁷⁶ *Ibid*, p.321.

de número natural que Wright tem em mente é impredicativa. Isto implica que Wright não poderá estipular que o domínio de segunda-ordem consiste em todos os conceitos co-extensivos com fórmulas da linguagem de **PH** e terá que encontrar um método alternativo não predicativista para delimitar este domínio. Se Wright optar, mais uma vez, pela quantificação irrestrita e estipular que os quantificadores de segunda-ordem quantificam sobre todos os conceitos que existem, ele terá que enfrentar um argumento contra a validade da lei do terceiro excluído quando aplicada a frases que contêm quantificadores de segunda-ordem.

iii) O argumento da “má companhia”

Tanto o axioma (**v**) como o axioma (**ph**) são axiomas do género $\lceil \Sigma\alpha = \Sigma\beta \leftrightarrow \delta(\alpha, \beta) \rceil$ em que α e β são variáveis de uma determinada ordem n , Σ refere uma função entre entidades de ordem n e objectos e δ refere uma relação de equivalência entre as entidades de ordem n . Chamemos aos axiomas com esta estrutura “abstracções”, e “ (δ, Σ) -abstracção” à abstracção em que δ é a expressão que refere a relação de equivalência entre entidades de ordem n e Σ a expressão que refere uma função entre essas entidades e os objectos.

Dada a inconsistência do axioma (**v**) com a lógica de segunda-ordem plena, é óbvio que nem todas as abstracções podem ser interpretadas (em lógica de segunda-ordem plena) como definições (contextuais) dos nomes próprios $\lceil \Sigma\alpha \rceil$. Em relação a este facto, alguém, como Wright, interessado em defender que (**ph**) é uma abstracção que *pode* ser interpretada como uma definição contextual, pode simplesmente dizer que só as abstracções *consistentes* podem ser interpretadas como definições.

Existe porém um problema.⁷⁷ Como vimos, o axioma **(ph)**, ou seja, a $(\approx, \#)$ -abstracção, implica a existência de um número infinito de objectos. Defina-se agora a relação ϕ entre conceitos da seguinte forma:

$$\phi(F, G) \leftrightarrow_{\text{def}} [\exists x \exists y (x \neq y \wedge Fx \wedge Fy) \vee \exists x \exists y (x \neq y \wedge Gx \wedge Gy)] \rightarrow \forall x (Fx \leftrightarrow Gx).$$

(Informalmente, dois conceitos F e G estão nesta relação se e só se ou são verdadeiros exactamente dos mesmos objectos ou têm ambos menos do que dois elementos). Esta relação é uma relação de equivalência entre conceitos.⁷⁸ Por outro lado, a (ϕ, Σ) -abstracção

⁷⁷ Este problema foi levantado por George Boolos no artigo “The Standard of Equality of Numbers” (1990) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995, p250.

⁷⁸ Repare-se que dois conceitos encontram-se na relação ϕ se e só se ou são co-extensivos (verdadeiros exactamente dos mesmos objectos) ou são ambos verdadeiros de menos do que dois objectos.

Pela reflexividade da relação de co-extensividade temos $\forall x (Fx \leftrightarrow Fx)$ e logo, $\phi(F, F)$. Segue-se que ϕ é reflexiva.

Se $\phi(F, G)$ é óbvio que $\phi(G, F)$. Segue-se que ϕ é simétrica.

Para a transitividade devemos demonstrar que $\phi(F, G) \wedge \phi(G, H) \rightarrow \phi(F, H)$. Suponhamos em primeiro lugar que $\phi(F, G) \wedge \phi(G, H)$ e que F e G são co-extensivos. Se G e H são co-extensivos então pela transitividade da relação de co-extensividade sabemos que F e H são co-extensivos e logo temos $\phi(F, H)$. Se G e H não são co-extensivos então, pela definição de ϕ , sabemos que nem G nem H são verdadeiros de mais do que um objecto. Mas sendo F co-extensivo com G , por suposição, sabemos que também F não é verdadeiro de mais do que um objecto e logo, da definição de ϕ segue-se que $\phi(F, H)$. Suponhamos agora que $\phi(F, G) \wedge \phi(G, H)$ e que F e G não são co-extensivos. Então F e G são verdadeiros de menos do que dois objectos. Se G e H são co-extensivos então também H é verdadeiro de menos do que dois objectos e temos $\phi(F, H)$. Se, pelo contrário, G e H não são co-

$$\Sigma F = \Sigma G \leftrightarrow \phi(F, G)$$

é consistente, pelo que (à partida) parece ser admissível como uma definição dos nomes próprios ΣF . No entanto, a (ϕ, Σ) -abstracção só pode ser verdadeira em interpretações cujo domínio de primeira-ordem tem menos do que três elementos,⁷⁹

extensivos então, pela definição de ϕ , são verdadeiros de menos do que dois objectos e, mais uma vez, temos $\phi(F, H)$. Segue-se que ϕ é transitiva.

⁷⁹ Suponhamos que $a \neq b \neq c \neq a$. Defina-se $Gx \leftrightarrow_{\text{def}} (x=a \vee x=b \vee x=c)$. Defina-se $Hx \leftrightarrow_{\text{def}} \neg \exists F [(a=\Sigma F \vee b=\Sigma F \vee c=\Sigma F) \wedge \neg Fx \wedge ((Fa \wedge Fb) \vee (Fa \wedge Fc) \vee (Fb \wedge Fc))]$. (Informalmente, o conceito H é verdadeiro de um objecto x se e só se nenhum dos G 's é a " Σ -extensão" de um conceito falso de x mas verdadeiro de dois G 's). Defina-se $Rx \leftrightarrow_{\text{def}} (\neg Gx \wedge \exists F (x=\Sigma F \wedge \neg Fx)) \vee (Gx \wedge x \neq a \wedge Ha) \vee (Gx \wedge x \neq b \wedge Hb) \vee (Gx \wedge x \neq c \wedge Hc) \vee (Gx \wedge \neg Ha \wedge \neg Hb \wedge \neg Hc)$ e seja $r =_{\text{def}} \Sigma R$. Repare-se que R é verdadeiro de pelo menos dois G 's. Ora, dado que R é verdadeiro de dois ou mais objectos, a (ϕ, Σ) -abstracção implica que $r = \Sigma F \leftrightarrow \forall x (Rx \leftrightarrow Fx)$.

Suponhamos que $a=r$. Se R é verdadeiro de *todos* os G 's. Então temos $\neg Ha \wedge \neg Hb \wedge \neg Hc$ e, logo, um dos G 's é a Σ -extensão de um conceito F com $Fa \wedge Fb \wedge \neg Fc$, um outro G (diferente do primeiro porque tem dois ou mais elementos e não é co-extensivo com ele) é a Σ -extensão de um conceito F com $Fa \wedge \neg Fb \wedge Fc$, e um terceiro G (diferente dos outros dois pelas razões já indicadas) é a Σ -extensão de um conceito F com $\neg Fa \wedge Fb \wedge Fc$. Uma vez que só há três G 's, um destes G 's é a . Segue-se que $a = \Sigma F$ para um conceito F falso de pelo menos um dos G 's. Mas então, uma vez que $r = a = \Sigma F$, temos $\forall x (Fx \leftrightarrow Rx)$ e, logo, R também é falso de pelo menos um G contradizendo a assunção de que R era verdadeiro de *todos* os G 's. No entanto, se R é falso de um dos G 's – chamemo-lhe k – então, pela definição de R , temos Hk , ou seja, nenhum dos G 's é a Σ -extensão de um conceito F falso de k mas verdadeiro dos outro dois G 's. Por outro lado, um dos G 's (a saber, a) é a Σ -extensão (a saber, r) de um conceito (a saber, R) verdadeiro de dois G 's mas falso de k . Segue-se que $\neg Hk$. Contradição. Segue-se que $a \neq r$ e, pelas mesmas razões, que $Gx \rightarrow x \neq r$, ou seja, r não é nenhum dos G 's.

Suponhamos que Rr . Dado que r não é nenhum dos G 's, temos $\exists F (r = \Sigma F \wedge \neg Fr)$ e, logo, $\neg Rr$. Contradição. Suponhamos então que $\neg Rr$. Então $\forall F (r = \Sigma F \rightarrow Fr)$ e, logo, Rr . Contradição.

pelo que, apesar de consistente, ela é inconsistente com **(ph)**. Isto implica que a (ϕ, Σ) -abstracção e **(ph)** não podem ser interpretadas como definições em *simultâneo*, o que seria absurdo se estas abstracções fossem meras definições ou explicações. Segue-se que pelo menos uma delas não pode ser interpretada como uma definição, ou explicação. Mas se uma não pode, porque é que a outra pode?

Tudo isto implica que, para justificar a possibilidade de se interpretar **(ph)** como uma definição (ou explicação), Wright vai ter que traçar *de forma justificada* uma fronteira (para além da consistência) entre as abstracções que *podem* ser interpretadas como definições e as que *não podem* de forma a impedir a existência (indesejável) de definições (ou explicações) mutuamente contraditórias.

Isto é o que Wright tenta fazer no seu artigo “On the Philosophical Significance of Frege’s Theorem”.⁸⁰ Segundo Wright a diferença essencial entre a **(ph)** e a (ϕ, Σ) -abstracção é que esta última “caracteriza” *todos* os conceitos existentes na medida em que implica, para qualquer conceito F , que F só é verdadeiro de um número *finito* de objectos. Ora isto impossibilita claramente a interpretação da (ϕ, Σ) -abstracção como uma mera definição (ou explicação): ao assumirmos a verdade deste axioma não estamos unicamente a estipular as condições de verdade de um determinado tipo de frases de identidade, estamos também (implicitamente) a “caracterizar” *todos* os conceitos existentes.

Em relação à $(\approx, \#)$ -abstracção, ou seja, ao axioma **(ph)**, a situação é, segundo Wright, diferente. Ao implicar a existência de um número *infinito* de objectos este

⁸⁰ C.Wright, “On the Philosophical Significance of Frege’s Theorem” (1997) em Richard Heck (ed.), *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, Oxford University Press, 1998.

axioma não “caracteriza” qualquer outro conceito: os (infinitos) objectos cuja existência (**ph**) implica são exactamente os objectos referidos pelos nomes próprios que este axioma introduz, ou seja, os objectos dos quais o conceito de número cardinal é suposto ser verdadeiro.

Assim formulado, o critério de Wright para a aceitabilidade da interpretação de uma abstracção como uma definição (ou explicação) depende da noção intuitiva (e algo ambígua) de “caracterização” de um conceito. No entanto, numa nota de rodapé, Wright dá-nos uma formulação mais precisa (numa linguagem mais técnica) deste critério: suponhamos que queremos adicionar uma (δ, Σ) -abstracção a uma teoria **T** de uma linguagem \mathbb{L} em que não ocorre a expressão-funcional Σ . Seja **T**₀ a teoria da linguagem $\mathbb{L} \cup \{\mathbf{P}, \Sigma\}$ que se obtém pela adição a **T** da (δ, Σ) -abstracção e frase $\lceil \forall x(\mathbf{P}x \leftrightarrow \exists \alpha(x = \Sigma\alpha)) \rceil$ em que **P** é um novo predicado e α uma variável de ordem n . Defina-se a “ Σ -restrição” de uma frase f (de \mathbb{L}) como a frase (de $\mathbb{L} \cup \{\mathbf{P}, \Sigma\}$) que se obtém pela substituição em f de todas as quantificações do género $\lceil \forall x \mathbf{B}(x) \rceil$ pela quantificação $\lceil \forall x(\neg \mathbf{P}x \rightarrow \mathbf{B}(x)) \rceil$ e de todas as quantificações do género $\lceil \exists x \mathbf{B}(x) \rceil$ pela quantificação $\lceil \exists x(\neg \mathbf{P}x \wedge \mathbf{B}(x)) \rceil$. Digamos que a (δ, Σ) -abstracção é *conservativa* em relação a **T** se e só se, para qualquer frase f de \mathbb{L} temos

$$\mathbf{T}_0 \text{ implica a } \Sigma\text{-restrição de } f \Leftrightarrow \mathbf{T} \text{ implica } f.$$

Então, o critério de Wright pode ser formulado da seguinte forma: uma (δ, Σ) -abstracção *pode* ser interpretada como uma definição dos nomes próprios $\lceil \Sigma\alpha \rceil$ se e só se for conservativa em relação a todas as teorias com as quais é consistente.

2. Teorias Predicativas: GG^{Pred^*} e $GG^{Ram^+}(red^{Fin})$.

Vamos agora concentrar a atenção em teorias predicativas relativamente à segunda-ordem.

Começamos com GG^{Pred^*} . Lembremo-nos que esta teoria é obtida a partir de GG restringindo a validade do axioma (**comp**) a fórmulas sem quantificadores de segunda-ordem e substituindo o axioma (**v**) pela sua versão esquemática (**v-esq**).

a) Será o axioma de (**v-esq**) o resultado de uma análise do conceito *lógico* e *primitivo* de extensão?

Não há dúvida que o axioma (**v-esq**) torna explícita uma das características mais fundamentais (se não a mais fundamental) da noção intuitiva de extensão, a saber que dois conceitos têm a mesma extensão quando são verdadeiros exactamente dos mesmos objectos. Foi provavelmente a consciência deste facto que levou Frege a considerá-lo, no *Funktion und Begriff*, como uma “lei fundamental da lógica”.⁸¹ É claro que Frege acreditava que a noção de extensão era uma noção lógica, a par, por exemplo, das noções de negação e de quantificação. Afinal, tal como o conceito de número cardinal, também o conceito de extensão parece satisfazer os critérios habituais para ser classificado como lógico, a saber, *conceito a priori*, *conceito aplicável em todos os ramos do saber*, ou *conceito essencial para a teoria da inferência*.

⁸¹ Gottlob Frege, *Funktion und Begriff*, tradução inglesa *Function and Concept* em P.Geach e M.Black (ed.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford University Press, 1952, p.26.

Antes da descoberta do Paradoxo de Russell seria natural colocar o conceito de extensão, a par com os restantes conceitos da lógica de segunda-ordem, na categoria dos conceitos lógicos. Com a descoberta do paradoxo, no entanto, a noção intuitiva de extensão tornou-se “suspeita” e deixou de ser viável assumir sem qualificações que ela era uma noção lógica. Não é, no entanto, apenas a noção de extensão que é essencial para a interpretação do Paradoxo de Russell: a noção de quantificação (de primeira e segunda-ordem) também é essencial, assim como a noção de equivalência material, ou a de igualdade, ou a de negação. Porque não optar então por lançar a suspeita sobre uma destas noções? Porquê “culpar” de imediato a noção (intuitiva) de extensão?

Aqui voltamos a encontrar o problema da origem da inconsistência de **GG** que discutimos no capítulo anterior. A diferença é que agora estamos a assumir que a inconsistência se deve a uma noção intuitiva particular, ou mais precisamente – porque as nossas noções intuitivas são, de certa forma, demasiado imprecisas para serem acusadas de inconsistentes (é este, na realidade, o sentido da palavra “intuitiva” neste contexto) – à forma como determinada noção intuitiva se encontra formalizada na teoria **GG**.

Existem portanto várias opções: ou culpamos a forma como a noção intuitiva de extensão está formalizada na teoria **GG**, ou seja, através do axioma (**v**) ou (**v-esq**), e tentamos encontrar outras maneiras (consistentes) para formalizar esta noção, ou culpamos alguma noção da lógica de segunda-ordem plena e tentamos encontrar formas alternativas consistentes para a formalizar. Ao optarmos pela primeira opção, que é a escolha de Boolos, lançamo-nos na teoria dos conjuntos, ou seja, no estudo de formalizações alternativas para a noção intuitiva de extensão (ou conjunto). Pela segunda opção parece ter optado Dummett que, em vez de duvidar da formalização

da noção intuitiva de extensão (i.e. do axioma (v)), opta por duvidar da formalização (de carácter impredicativo) da noção intuitiva de quantificação de segunda-ordem.⁸²

A questão da natureza epistemológica da noção de extensão parece-nos, no entanto, ser independente da questão da sua correcta formalização. Mesmo que duvidemos, como Boolos duvida, do axioma (v) como uma formalização correcta da noção intuitiva de extensão, podemos sempre defender que, seja qual for a sua formalização, a noção de extensão será sempre uma noção lógica a par com a noção de negação, por exemplo. Tudo dependerá dos critérios que utilizarmos para classificar uma noção como lógica. É certo que aqueles que defendem que a noção de extensão é uma noção lógica terão alguma dificuldade em explicar como é que

⁸² À primeira vista Dummett também não parece estar satisfeito com a forma como a noção intuitiva de extensão se encontra formalizada no axioma (v). Em *Frege: Philosophy of Mathematics* (p.316) Dummett diz-nos que “o que os paradoxos revelaram não foi a existência de conceitos com extensões inconsistentes mas daquilo que podemos chamar de conceitos indefinidamente extensíveis”. Ora, não tendo um “conceito indefinidamente extensível” uma extensão (no sentido intuitivo do termo), parece que Dummett terá que rejeitar a forma como o axioma (v) formaliza a noção intuitiva de extensão pois, segundo este axioma, *todos* os conceitos têm aparentemente uma extensão. No entanto, ao analisarmos a posição de Dummett com mais cuidado, percebemos que a sua posição é mais subtil. Dado que o axioma (v) contém quantificadores de primeira-ordem, e dado que a lógica subjacente à teoria **GG** é uma lógica clássica, ou seja, uma lógica em que a lei do terceiro excluído é suposta ser válida, Dummett conclui que o domínio de primeira-ordem de **GG** tem que formar uma extensão (repare-se que este é o seu argumento contra as quantificações irrestritas que descrevemos no capítulo III.1.b). Ora se existisse em **GG** um conceito indefinidamente extensível é óbvio que o domínio de primeira-ordem de **GG** também seria indefinidamente extensível. Segue-se que todos os conceitos de **GG** têm uma extensão. O axioma (v) é, por conseguinte, para Dummett, uma formalização correcta da noção intuitiva de extensão, pelo menos no contexto da lógica de segunda-ordem clássica.

uma noção lógica pode causar tantos problemas (e.g. os paradoxos) e levantar tantas questões (e.g. como formalizá-la?). A noção de extensão não é, no entanto, a única que se encontra nesta posição: a noção de quantificação de segunda-ordem, e mesmo a noção de negação, levantam também algumas dificuldades e dão origem a complexas discussões acerca da sua correcta formalização. Isto não é razão, no entanto, para as excluir da categoria das noções lógicas.

b) Será o axioma (**v-esq**) uma definição contextual do conceito de extensão?

A hipótese de se interpretar o axioma (**v-esq**) como uma verdade lógica resultante da análise do conceito lógico primitivo de extensão permanece, portanto, em aberto. Também aqui, entanto, tal como no caso do conceito de número cardinal, o logicista poderá tentar defender uma tese mais forte. Em vez de defender que a teoria das extensões (ou conjuntos) é uma teoria lógica mais abrangente que a lógica de segunda-ordem predicativa, o logicista poderá argumentar que a noção de extensão é definível em lógica de segunda-ordem predicativa e, logo, que a aritmética interpretável a partir dessa definição é, simplesmente, lógica de segunda-ordem predicativa.

No capítulo anterior discutimos algumas críticas à interpretação de (**ph**) como uma definição contextual dos nomes próprios do género $\lceil \#F \rceil$ no contexto da lógica de segunda-ordem plena. Teremos agora que determinar se estas críticas também se aplicam à interpretação de (**v-esq**) como uma definição contextual dos nomes próprios do género $\lceil \wedge A(x) \rceil$ no contexto da lógica de segunda-ordem predicativa. Começemos com o Problema de Júlio César. Também aqui o axioma (**v-esq**) parece não ser suficiente para determinar o sentido de frases do género $\lceil \wedge A(x)=t \rceil$ em que t

é um nome próprio de qualquer outro tipo. Vimos, no entanto, que Wright tem uma solução para este problema que também pode ser aplicada neste caso: se t é um nome próprio para um objecto pertencente a uma categoria δ tal que o valor de verdade de equações compostas por nomes próprios n e m para objectos de δ não é determinado de forma sistemática por frases do género $\lceil \forall x(Nx \leftrightarrow Mx) \rceil$, em que N e M são predicados associados aos nomes n e m , então $\lceil \wedge A(x)=t \rceil$ é falsa. Caso contrário, sendo T o predicado ao qual o nome t está associado, a frase $\lceil \wedge A(x)=t \rceil$ terá o mesmo valor de verdade que a frase $\lceil \forall x(A(x) \leftrightarrow Tx) \rceil$.

A segunda crítica que discutimos referia-se à impredicatividade. Vimos então que esta crítica dependia essencialmente do facto de o axioma **(ph)**, interpretado como uma definição no contexto da lógica de segunda-ordem plena, ser (duplamente) impredicativo. Uma vez que agora estamos no contexto da lógica de segunda-ordem *predicativa*, a componente de *segunda-ordem* da crítica de Dummett desaparece. No entanto, o axioma **(v-esq)** interpretado como uma definição dos números cardinais no contexto da lógica de segunda-ordem predicativa, continua a ser impredicativo relativamente à *primeira-ordem* pelo que esta componente da crítica de Dummett permanece.

Resta-nos discutir o argumento da “má companhia” agora aplicado ao axioma **(v-esq)**. Aqui, no entanto, a situação é radicalmente diferente, como o seguinte raciocínio demonstra.⁸³ Suponhamos que $\mathbf{Eq}(F,G)$ é uma relação de equivalência entre conceitos. Defina-se uma função Σ entre conceitos e objectos através da equação

$$\Sigma F =_{\text{def}} \wedge x. \exists G(x = \wedge G \wedge \mathbf{Eq}(F,G)),$$

⁸³ Isto foi-me apontado por Fernando Ferreira.

ou seja, Σ faz corresponder a cada conceito a extensão das extensões de conceitos que se encontram na relação de equivalência **Eq** com ele. Então temos

$$\Sigma F = \Sigma G \leftrightarrow \mathbf{Eq}(F, G).$$

Um raciocínio semelhante demonstra que, dada qualquer relação de equivalência **Eq** entre entidades de qualquer tipo determinado, é sempre possível definir uma função Σ entre essas entidades e os objectos de forma a que

$$\Sigma \alpha = \Sigma \beta \leftrightarrow \mathbf{Eq}(\alpha, \beta).$$

Segue-se que todas as abstracções são interpretáveis em $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$. Mas dada a consistência desta teoria elas não poderão ser inconsistentes entre si.

A interpretação de (**v-esq**) como uma definição contextual dos nomes próprios do género $\lceil \wedge A(x) \rceil$ é portanto mais fácil de defender do que a interpretação de (**ph**) como uma definição contextual dos nomes $\lceil \#F \rceil$. Este facto não torna, no entanto, a teoria $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$ necessariamente mais atractiva para um neo-logicista. A razão é que ela é (aparentemente) bastante mais fraca do que a teoria **PH**. Em particular, como já foi referido⁸⁴, ela não permite a definição adequada do conceito de número natural. Este último facto parece ser fatal para as aspirações do logicista no que respeita esta teoria. Para além de fundamentar a interpretação do axioma da indução (**aind**), este conceito é um dos conceitos aritméticos mais importantes e sem ele verdades aritméticas como *Qualquer número natural é sucedido por outro número natural* não podem sequer ser compreendidas.

A situação não melhora, como vimos, quando passamos para a teoria predicativa ramificada \mathbf{GG}^{Ram} . Também aqui não parece ser possível definir adequadamente o

⁸⁴ Ver os parágrafos iniciais do Apêndice 2a.

conceito de número natural o que impossibilita a interpretação de grande parte da matemática elementar.

Foi ao tentar tornar a sua própria teoria ramificada dedutivamente mais forte que Bertrand Russell introduziu o célebre axioma da redutibilidade segundo o qual, para todo o n , todos os conceitos de tipo n são co-extensivos com conceitos de tipo 0:⁸⁵

$$(\text{red}): \exists F^0 \forall x (F^n x \leftrightarrow F^0 x).$$

É claro que, do ponto de vista do programa logicista este axioma só será interessante se for possível interpretá-lo, também ele, como uma verdade lógica. Russell diz-nos que ele axioma deriva do “senso comum”, mais precisamente da forma como o “senso comum” entende a noção de classe. A ideia de Russell é que, dado um conceito F^n o “senso comum” diz-nos que os objectos dos quais F^n é verdadeiro formam uma classe \mathbf{C} . Isto implica que, para qualquer x , $F^n x \leftrightarrow x \in \mathbf{C}$ e, uma vez que o conceito de pertença a \mathbf{C} é um conceito de tipo 0, que todos os conceitos são co-extensivos com um conceito de tipo 0.⁸⁶

Mesmo assumindo que podemos confiar no dito “senso comum”, o que parece improvável, a introdução do axioma da redutibilidade parece trazer à lógica predicativa a força da lógica impredicativa simples reduzindo a cinzas as razões filosóficas para preferir aquela a esta.⁸⁷ Em particular, face à presença do axioma (**v**-

⁸⁵ Bertrand Russell, “Mathematical logic as based on the theory of types” (1908) em Jean van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967, p.167.

⁸⁶ Ibid, p.167.

⁸⁷ Russell apercebe-se deste facto e diz-nos que, à luz do axioma da redutibilidade, as teorias predicativas ramificadas são de facto *extensionalmente* equivalentes às teorias impredicativas. Segundo Russell, os “problemas” com a teoria **GG** devem-se tanto ao axioma (**v**) como à impredicatividade. O problema com o axioma (**v**) é, segundo Russell, que ele tenta “tratar” conceitos

esq) na teoria $\mathbf{GG}^{\mathbf{Ram}}$, a introdução do axioma (**red**) resulta numa teoria inconsistente.⁸⁸ A introdução do axioma da redutibilidade (**red**) não é portanto uma solução adequada para o problema da impotência dedutiva da teoria $\mathbf{GG}^{\mathbf{Ram}}$.

Em relação a este ponto Fernando Ferreira propõe o seguinte.⁸⁹ Suponhamos que F^n é um conceito do tipo n verdadeiro, numa interpretação I , apenas de um número *finito* de objectos. É então evidente que existe uma fórmula do tipo $\lceil x=y_1 \vee \dots \vee x=y_m \rceil$ co-extensiva com F^n em I (numa dada atribuição de objectos às variáveis livres). Mas uma vez que esta fórmula não contém qualquer quantificador ou predicado, podemos utilizar o axioma de compreensão predicativa (**comp-pred**) para demonstrar a existência de um conceito F^0 , do tipo 0, co-extensivo com ela e, logo, com o conceito F^n . Existem portanto razões para aceitarmos que a restrição do axioma (**red**) a conceitos finitos ou sub-conceitos de conceitos finitos, ou seja, o axioma

$$(\mathbf{red}^{\mathbf{Fin}}): \quad \mathbf{Fin}F^m \rightarrow \forall G^n (G^n \subseteq F^m \rightarrow \exists G^0 \forall x (G^0 x \leftrightarrow G^n x))$$

como se fossem objectos, ou seja, confunde as ordens (tipos simples). O problema com a impredicatividade (de segunda-ordem) é que permite definir entidades por intermédio de totalidades em que elas próprias se encontram incluídas, ou seja, confunde os tipos (tipos ramificados).

⁸⁸ É possível derivar uma versão do Paradoxo de Russell: considere-se a Extensão de Russell $r =_{\text{def}} \wedge \mathbf{R}^1$ em que $\mathbf{R}^1 x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F^0 (x = \wedge F^0 \wedge \neg F^0 x)$. Suponhamos que $\exists F^0 (r = \wedge F^0 \wedge \neg F^0 r)$. Dado que $r = \wedge \mathbf{R}^1$, pelo axioma (**v-esq**) teríamos $\forall x (F^0 x \leftrightarrow \mathbf{R}^1 x)$ e, logo, $\neg \mathbf{R}^1 r$. Mas pela definição de \mathbf{R}^1 teríamos também $\mathbf{R}^1 r$. Contradição. Segue-se que $\neg \exists F^0 (r = \wedge F^0 \wedge \neg F^0 r)$. Ora se o axioma (**red**) fosse válido o conceito \mathbf{R}^1 seria co-extensivo com um conceito \mathbf{R}^0 de tipo 0. Teríamos então $r = \wedge \mathbf{R}^0 \wedge \neg \mathbf{R}^0 r$ e, logo, $\exists F^0 (r = \wedge F^0 \wedge \neg F^0 r)$. Contradição.

⁸⁹ Em conversas privadas.

é, senão uma verdade lógica, uma verdade analítica do conceito (de segunda-ordem) **Fin** de finitude.⁹⁰ O axioma será uma (espécie de) verdade lógica se for possível encontrar uma definição do conceito **Fin** em lógica de segunda-ordem ramificada.

Na lógica de segunda-ordem *plena* o conceito de finitude pode ser definido através da fórmula

$$\mathbf{Fin}F \leftrightarrow_{\text{def}} \exists R (\mathbf{RLin}F \wedge \forall G (G \subseteq F \wedge \exists x Gx \rightarrow \exists a \exists b (Ga \wedge Gb \wedge \forall x (Gx \rightarrow aRx \wedge xRb))))),$$

ou seja, um conceito F é finito se e só se existir uma relação R que o ordena linearmente de forma a que todos os sub-conceitos não vazios de F têm um primeiro e último elemento em R . Uma ordem linear de um conceito F é uma relação cuja restrição aos elementos de F é reflexiva, transitiva, anti-simétrica e total: $\mathbf{RLin}F \leftrightarrow_{\text{def}} \forall x \forall y \forall z [Fx \wedge Fy \wedge Fz \rightarrow xRx \wedge (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz) \wedge (xRy \wedge yRx \rightarrow x=y) \wedge (xRy \vee yRx)]$.

O problema é que esta definição não pode ser transferida para a lógica de segunda-ordem *ramificada* porque, nesta lógica, não é possível quantificar sobre todas as relações nem sobre todos os conceitos mas apenas sobre todas as relações ou conceitos de um determinado tipo. Suponhamos, no entanto, que definimos o conceito de finitude para conceitos do tipo 0 da seguinte forma:

$$\mathbf{Fin}F^0 \leftrightarrow_{\text{def}} \exists R^0 (\mathbf{R}^0 \mathbf{Lin}F^0 \wedge \forall G^0 (G^0 \subseteq F^0 \rightarrow \exists a \exists b \forall x (G^0 x \rightarrow aR^0 x \wedge xR^0 b))),$$

e que generalizamos esta definição para conceitos do tipo m da seguinte forma:

$$\mathbf{Fin}F^m \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F^0 (\mathbf{Fin}F^0 \wedge \forall x (F^m x \leftrightarrow F^0 x)).$$

Será esta definição correcta? A resposta será afirmativa se conseguirmos argumentar que, para qualquer interpretação I , $\mathbf{Fin}F^m$ é verdadeiro em I se e só se F^m for “realmente” finito (em I). Se F^m for “realmente” finito numa interpretação I , é

⁹⁰ $G \subseteq F \leftrightarrow_{\text{def}} \forall x (Gx \rightarrow Fx)$.

fácil ver que $\mathbf{Fin}F^m$ é verdadeiro em I. O converso é, no entanto mais difícil. Suponhamos que $\mathbf{Fin}F^m$ é verdadeiro numa interpretação I. Pela definição de \mathbf{Fin} , F^m é co-extensivo com um conceito F^0 para o qual existe uma ordem linear R^0 tal que todos os sub-conceitos de tipo 0 de F^0 têm um primeiro e um último elemento em R^0 . A questão é saber se pode existir um sub-conceito de F^0 de tipo superior a 0 que não tem um primeiro ou um último elemento em R^0 . A nossa definição de finito será correcta se a resposta a esta questão for negativa.

Vamos aqui deixar em aberto esta questão. Resta-nos referir que, de acordo com Fernando Ferreira, $\mathbf{GG}^{\text{Ram}}+(\text{red}^{\text{Fin}})$ é consistente e interpreta $\mathbf{PA1}$.⁹¹ Ela é portanto uma teoria interessante para quem estiver tentado a defender um programa neo-logicista de redução da aritmética à lógica numa estratégia predicativista.

CONCLUSÃO

⁹¹ $\mathbf{PA1}$, ou a aritmética de primeira-ordem, é a teoria de lógica de primeira-ordem cujos axiomas são todos os axiomas de \mathbf{Q} mais o axioma esquemático de indução

No decorrer desta dissertação tentámos avaliar até que ponto a tese de Frege que a aritmética é lógica é hoje defensável. No primeiro capítulo introduzimos o sistema de Frege – **GG** – mostramos como interpretar a aritmética – **PA2** – neste sistema e interpretámos o Paradoxo de Russell demonstrando a sua inconsistência formal. No segundo capítulo tentámos descobrir qual a causa da inconsistência de **GG**. Concluimos que a causa da inconsistência deve ser atribuída àquele aspecto da teoria **GG** cuja eliminação dá origem a uma teoria consistente e – no que respeita às consequências boas – dedutivamente tão forte ou quase tão forte quanto **GG**. Definimos então várias sub-teorias consistentes de **GG** – **PH**, **GG^B**, **GG^{Pred*}**, **GG^{Ram}** – nas quais se pode interpretar toda ou alguma aritmética. Destas teorias, as duas primeiras resultam do enfraquecimento do axioma (**v**), as duas últimas da eliminação da impredicatividade de segunda-ordem. Por fim, no terceiro capítulo, tentámos determinar até que ponto os axiomas (**ph**) e (**v-esq**) podem ou não ser considerados como verdades lógicas ou definições lógicas. Isto levou-nos a considerar

- (i) até que ponto estes axiomas podem ser vistos como resultantes de análises de conceitos lógicos primitivos – o conceito de número cardinal em (**ph**) e o conceito de extensão em (**v-esq**) – ou
- (ii) ser interpretados como um tipo de definição (contextual) lógica destes conceitos.

Vimos então que destas duas hipóteses a primeira, apesar de mais defensável, é a que fundamenta uma versão do logicismo mais fraca: ao interpretarmos os axiomas (**ph**) e (**v-esq**) como verdades lógicas primitivas resultantes da análise dos conceitos lógicos de número cardinal e de extensão estamos a assumir que a aritmética que as teorias **PH** e **GG^{Pred*}** interpretam são teorias (lógicas) mais abrangente do que a

(**a**ind-esq): $\mathbf{A}(0) \wedge \forall x \forall y (x \mathbf{P} y \wedge \mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{A}(y)) \rightarrow \forall x \mathbf{A}(x)$.

lógica de segunda-ordem plena e predicativa, respectivamente, da mesma forma que estas últimas são mais abrangentes do que o cálculo proposicional. Uma versão mais forte do logicismo defende que a aritmética é *apenas* lógica de segunda-ordem (plena ou predicativa) e não uma teoria mais abrangente. A defesa desta versão do logicismo implica a opção pela hipótese (ii) e a interpretação dos axiomas **(ph)** e **(v-esq)** como definições lógicas dos conceitos de número cardinal e de extensão. Discutimos vários argumentos contra esta interpretação, a saber, o Problema de Júlio César, as críticas intuicionistas de Dummett, e o argumento da "má companhia" (dado o carácter predicativo da teoria $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$, a componente de segunda-ordem do segundo e a totalidade do terceiro argumento não se aplicam à interpretação de **(v-esq)** como uma definição). Vimos, no entanto, que o Problema de Júlio César tem uma solução e que o argumento da "má companhia" pode ser bloqueado. Para responder à crítica de Dummett seria necessário entrar no complexo debate intuicionismo/platonismo o que implicaria, por si só, uma nova dissertação. No entanto, se assumirmos *contra* Dummett a validade das quantificações irrestritas (de primeira e segunda-ordem) no contexto da lógica de segunda-ordem plena, devemos concluir que tanto o axioma **(ph)** como o axioma **(v-esq)** podem com alguma legitimidade (face aos argumentos considerados) ser interpretados como definições lógicas dos conceitos de número cardinal e de extensão. A tese de Frege que a aritmética é lógica permanece portanto defensável.

Apesar da interpretação de **(v-esq)** como uma definição do conceito de extensão ser aparentemente mais defensável do que a interpretação de **(ph)** como uma definição do conceito de número cardinal (uma vez que é imune à componente de segunda-ordem do primeiro e ao último argumento considerado), o facto de $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$ interpretar apenas o fragmento **Q** da aritmética limita de alguma forma o interesse desta teoria para um logicista. Isto levou-nos a considerar a teoria ramificada

$\mathbf{GG}^{\text{Ram}} + (\mathbf{red}^{\text{Fin}})$ na qual é possível interpretar toda a aritmética de primeira-ordem.

Deixámos, no entanto, em aberto se esta teoria pode ou não ser considerada como lógica, devido às dificuldades que encontrámos com a definição de finitude.

APÊNDICE 1a:

O Teorema de Frege: Interpretação de PA₂ em PH

Como Heck nos mostrou, a interpretação de Frege nos *Grundgesetze* de **PA2** em **GG** pode ser decomposta (salvo alguns pormenores irrelevantes) em duas partes: a interpretação de **PH** em **GG** e a interpretação de **PA2** em **PH**.⁹² O facto de **PH** interpretar **PA2** ficou, por esta razão, conhecido como o *Teorema de Frege*. A demonstração do Teorema de Frege que vamos aqui apresentar deve-se, no entanto, a Crispin Wright e resulta de uma simplificação da demonstração original de Frege que se encontra (implícita) nos *Grundgesetze*.⁹³

Axiomas de PA2 (a interpretar): ⁹⁴

$$(a_1) \quad \exists y(xPy)$$

$$(a_2) \quad \exists y(yPx) \leftrightarrow x \neq 0$$

$$(a_3) \quad xPy \wedge wPz \rightarrow (x=w \leftrightarrow y=z)$$

$$(a_{ind}) \quad F0 \wedge P\text{-trans-F} \rightarrow \forall xFx$$

Definições:

⁹² Em «The development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*» (1993) em William Demopoulos (ed.) *Frege's Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.

⁹³ Ver Crispin Wright, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press, 1983, p.154.

⁹⁴ Uma vez que estamos no contexto da lógica de segunda-ordem plena, onde os resultados do *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?* de Dedekind são válidos, não será necessário interpretar os axiomas **(a4)**,...,**(a7)** concernentes às operações da adição e da multiplicação (ver, a este respeito, a nota de rodapé n.º 7).

As definições que vamos apresentar seguem de muito perto as definições que demos em **GG** das expressões não lógicas de **PA2**. A diferença é que agora não partimos da expressão-funcional primitiva “ \wedge ” mas directamente da expressão-funcional “ $\#$ ”, que passa agora ela a ser primitiva.

Em primeiro lugar definimos, tal como em **GG**, o conceito **Card** de número cardinal como o conceito verdadeiro só dos objectos que são o número de algum conceito:

$$\mathbf{Card}x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F(x=\#F)$$

De seguida definimos a relação xPy de predecessão. Um objecto x precede um objecto y se e só se existirem dois conceitos F e G tal que x é o número de F , y é o número de G , todos os F 's são G 's e todos os G 's à excepção de um são F 's:

$$xPy \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F \exists G \exists w [x=\#F \wedge y=\#G \wedge Gw \wedge \forall z (Fz \leftrightarrow (Gz \wedge z \neq w))]$$

Segue-se a definição do número **0**, tal como em **GG**, como o número do conceito *objecto desigual a si próprio*:

$$\mathbf{0} =_{\text{def}} \#[x:x \neq x]$$

e a definição da função ancestral $*$ entre relações binárias:

$$xR*y \leftrightarrow_{\text{def}} \forall F (\forall w (xRw \rightarrow Fw) \wedge R\text{-trans-}F \rightarrow Fy)$$

Podemos agora definir, mais uma vez, o conceito **Nat** de número natural, como o conceito verdadeiro só dos números cardinais dos quais o zero é um predecessor ancestral mais o próprio zero:

$$\mathbf{Nat}x \leftrightarrow_{\text{def}} \mathbf{0P}^*x \vee \mathbf{0}=x.$$

Por fim podemos definir as relações $<$ e \leq da seguinte forma:

$$x < y \leftrightarrow_{\text{def}} xP^*y$$

$$x \leq y \leftrightarrow_{\text{def}} xP^*y \vee x=y.$$

Teoremas:

Lema 1.1: $\#F=0 \leftrightarrow \forall x \neg Fx$

Demonstração: Se $\#F=0$ então $F \approx [x:x \neq x]$, ou seja, existe uma bijecção R entre F e $[x:x \neq x]$. Se existe um x tal que Fx então, pela definição de bijecção, $\exists! y (y \neq x \wedge xRy)$. Contradição. Segue-se que $\neg \exists x Fx$. Se, por outro lado, $\forall x \neg Fx$, então qualquer relação é uma bijecção entre F e $[x:x \neq x]$. Por (ph) segue-se que $\#F = \#[x:x \neq x] = 0$. \square

Lema 1.2: $xPy \wedge zPw \rightarrow (x=z \leftrightarrow y=w)$

Demonstração: Suponhamos que $xPy \wedge zPw$. Então, pela definição de P , existe um conceito F e um objecto a tal que $Fa \wedge y = \#F \wedge x = \#[z:Fz \wedge z \neq a]$ e existe um conceito G e um objecto b tal que $Gb \wedge w = \#G \wedge x = \#[z:Gz \wedge z \neq b]$. Mas então $\#[z:Fz \wedge z \neq a] = x = \#[z:Gz \wedge z \neq b]$ e, pelo axioma (ph), $[w:Fw \wedge w \neq a] \approx [w:Gw \wedge w \neq b]$, ou seja, existe uma bijecção R entre $[w:Fw \wedge w \neq a]$ e $[w:Gw \wedge w \neq b]$. Defina-se $xR'y \leftrightarrow_{def} xRy \vee (x=a \wedge y=b)$. Repare-se que R' é uma bijecção entre F e G . Logo, $F \approx G$. Segue-se, por (ph) que $\#F = \#G$, ou seja, $y=w$.

Suponhamos agora que $xPy \wedge wPy$. Então, pela definição de P , existe um conceito F e um objecto a tal que $Fa \wedge y = \#F \wedge x = \#[z:Fz \wedge z \neq a]$ e existe um conceito G e um objecto b tal que $Gb \wedge y = \#G \wedge w = \#[z:Gz \wedge z \neq b]$. Mas então $\#F = y = \#G$ e, por (ph), $F \approx G$, ou seja existe uma bijecção R entre F e G . Defina-se $xR'y \leftrightarrow (xRy \wedge x \neq a \wedge y \neq b) \vee (aRy \wedge xRb)$. R' é uma bijecção entre os conceitos $[z:Fz \wedge z \neq a]$ e $[z:Gz \wedge z \neq b]$. Segue-se que $[z:Fz \wedge z \neq a] \approx [z:Gz \wedge z \neq b]$ e, por (ph), que $\#[z:Fz \wedge z \neq a] = \#[z:Gz \wedge z \neq b]$, ou seja, $x=w$. \square

Lema 1.3: $\neg xP0$

Demonstração: Suponhamos que $xP0$. Então, pela definição de P , $\exists F \exists a (0 = \#F \wedge Fa \wedge x = \#[w: Fw \wedge w \neq a])$, o que contradiz o lema 1.1. Segue-se que $\neg xP0$. \square

Lema 1.4: $xQy \rightarrow xQ^*y$

Demonstração: Suponhamos que $xQy \wedge Q\text{-trans-}F \wedge \forall w(xQw \rightarrow Fw)$. Então temos Fy e, pela definição de $*$, temos xQ^*y . \square

Lema 1.5: $xQ^*y \wedge yQ^*z \rightarrow xQ^*z$

Demonstração: Suponhamos que $xQ^*y \wedge yQ^*z \wedge Q\text{-trans-}F \wedge \forall w(xQw \rightarrow Fw)$. Então temos Fy porque $xQ^*y \wedge Q\text{-trans-}F \wedge \forall w(xQw \rightarrow Fw)$. Por outro lado, uma vez que $Q\text{-trans-}F \wedge Fy$, temos $\forall w(yQw \rightarrow Fw)$. Mas então temos $yQ^*z \wedge Q\text{-trans-}F \wedge \forall w(yQw \rightarrow Fw)$. Pela definição de $*$ segue-se que Fz . \square

Lema 1.6: $x < y \rightarrow \exists w(wPy \wedge x \leq w)$

Demonstração: Fixe-se x . Defina-se $Fk \leftrightarrow_{\text{def}} \exists w(wPk \wedge x \leq w)$. Demonstramos que F é verdadeira do sucessor b de x (único pelo lema 1.2) e que $P\text{-trans-}F$. Daqui segue-se, pela definição de $<$, que $x < y \rightarrow Fy$.

Seja b é o sucessor de x então temos $xPb \wedge x \leq b$ e, logo, $\exists w(wPb \wedge x \leq w)$, ou seja, Fb .

Suponhamos que $Fa \wedge aPb$. Demonstramos que Fb , ou seja, que $x \leq a$. Dado que Fa , a tem um predecessor w tal que $wPa \wedge x \leq w$. Se $x=w$ então xPa e, pelo lema 1.4, $x < a$ e, logo, $x \leq a$. Suponhamos portanto que $x < w$. Uma vez que wPa , pelo lema 1.4,

temos $w < a$. Mas então, pela transitividade de $<$ (lema 1.5), temos $x < a$. Segue-se que $x < a$ e, logo, que $x \leq a$. \square

Lema 1.7: $\text{Nat}^n \rightarrow \neg x < x$

Demonstração: Defina-se $Fx \leftrightarrow_{\text{def}} \neg x < x$. Demonstramos que $F0$ e que $P\text{-trans-}F$.

Suponhamos que $0 < 0$. Pelo lema 1.6 temos $\exists w(wP0)$ contradizendo o lema 1.3. Segue-se que $\neg 0 < 0$, ou seja, $F0$.

Suponhamos que Fa e que aPb . Se $b < b$ então, pelo lema 1.6, $b \leq a$. Se $b = a$ temos $a < a$ contradizendo Fa . Logo $b < a$. Mas aPb , logo, pelo lema 1.4, $a < b$ e, pela transitividade de $<$ (lema 1.5), temos $a < a$, contradizendo Fa . Segue-se que $\neg b < b$ e que $P\text{-trans-}F$. \square

Lema 1.8: $mPn \wedge \text{Nat}^n \rightarrow \forall x(x \leq m \leftrightarrow (x < n \wedge x \neq n))$

Demonstração: Suponhamos que $mPn \wedge \text{Nat}^n$. Pelos lemas 1.3, 1.4 e 1.7 temos, respectivamente, $0 < n$, $m < n$ e $\neg n < n$.

Suponhamos que $x = m$. Então temos xPn e, pelo lema 1.4, $x < n$. Mas se $x = n$ então teríamos $n < n$ contradizendo $\neg n < n$. Segue-se que $x < n \wedge x \neq n$.

Suponhamos que $x < m$. Como $m < n$, pela transitividade de $<$ (lema 1.5) temos $x < n$. Mas se $x = n$ então teríamos $n < n$ contradizendo $\neg n < n$. Segue-se que $x < n \wedge x \neq n$.

Suponhamos finalmente que $x < n \wedge x \neq n$. Uma vez que mPn temos $x < n \wedge mPn$. Daqui segue-se, pelo lema 1.6, que $x \leq m$.

Segue-se que $x \leq m \leftrightarrow (x < n \wedge x \neq n)$. \square

Lema 1.9: $mPn \wedge \text{Nat}^n \rightarrow \#[x: x \leq m]P\#[x: x \leq n]$

Demonstração: Suponhamos que $nPm \wedge \text{Nat}n$. Então, pelo lema 1.8, $x \leq m \leftrightarrow (x \leq n \wedge x \neq n)$. Mas $n \leq n$, logo, pela definição de P , $\#[x:x \leq m]P\#[x:x \leq n \wedge x \neq n]$. \square

Lema 1.10: $\text{Nat}m \wedge P\#[x:x \leq m] \rightarrow \text{Nat}\#[x:x \leq m] \wedge \#[x:x \leq m]P\#[x:x \leq \#[x:x \leq m]]$

Demonstração: Suponhamos que $\text{Nat}m \wedge P\#[x:x \leq m]$. Pelo lema 1.4 temos $m < \#[x:x \leq m]$.

Suponhamos que $0 = m$. Então temos $0P\#[x:x \leq m]$ e, pelo lema 1.4, $0 < \#[x:x \leq m]$. Segue-se que $\text{Nat}\#[x:x \leq m]$. Do lema 1.9 segue-se que $\#[x:x \leq m]P\#[x:x \leq \#[x:x \leq m]]$.

Suponhamos que $0 < m$. Pela transitividade de $<$ (lema 1.5) e uma vez que $m < \#[x:x \leq m]$, temos $0 < \#[x:x \leq m]$ e, logo, $\text{Nat}\#[x:x \leq m]$. Do lema 1.9 segue-se que $\#[x:x \leq m]P\#[x:x \leq \#[x:x \leq m]]$. \square

Lema 1.11: $0P\#[x:x \leq 0]$

Demonstração: Defina-se $Fx \leftrightarrow_{\text{def}} x \leq 0$. Então $F0$. Pela definição de P , $\#[x:Fx \wedge x \neq 0]P\#[x:Fx]$. Suponhamos que existe um k tal que $Fk \wedge k \neq 0$. Então $k < 0$, e logo, pelo lema 1.6, $\exists w(wP0)$, contradizendo o lema 1.3. Logo $\forall x \neg (Fx \wedge x \neq 0)$ e, pelo lema 1.1, $\#[x:Fx \wedge x \neq 0] = 0$. \square

Lema 1.12: $\text{Nat}n \rightarrow nP\#[x:x \leq n]$

Demonstração: Defina-se $Fw \leftrightarrow_{def} wP\#[x:x \leq w]$. Pelo lema 1.11 temos $F0$. Suponhamos que $Fa \wedge Pb$. Então $aP\#[x:x \leq a]$, e, pelo lema 1.10, $bP\#[x:x \leq b]$. Logo P -*trans-F* e, pela definição de **Nat**, $Natn \rightarrow Fn$. \square

$(a_1^{Nat}): Natn \rightarrow \exists y(Naty \wedge nPy)$

Demonstração: Se $Natn$, pelo lema 1.12 temos $nP\#[w:w \leq n]$. Segue-se que $Natn \wedge xP\#[w:w \leq n]$. Mas então, pelo lema 1.10, temos $Nat\#[w:w \leq n]$. \square

$(a_2^{Nat}): Natn \rightarrow (\exists y(Naty \wedge yPn) \leftrightarrow n \neq 0)$

Demonstração: Defina-se $Fn \leftrightarrow_{def} \exists y(Naty \wedge yPn)$. Se w é o sucessor de 0 temos $Nat0 \wedge 0Pw$ e logo, $\exists y(Naty \wedge yPw)$, ou seja, Fw .

Suponhamos agora que $Fa \wedge Pb$. Então a é precedido por um natural k único pelo lema 1.2. Também pelo lema 1.2, a é o único sucessor de k . Do axioma (a_1^{Nat}) segue-se que a é natural. Segue-se que $\exists y(Naty \wedge yPb)$, ou seja, Fb . Segue-se que P -*trans-F*.

Da definição de $<$ segue-se que $0 < n \rightarrow Fn$, ou seja, $Natn \rightarrow (n \neq 0 \rightarrow Fn)$.

Pelo lema 1.3 temos $\neg \exists y(Naty \wedge yP0)$ pelo que $\neg F0$. Segue-se que $Natn \rightarrow (Fn \rightarrow n \neq 0)$. \square

$(a_3^{Nat}): Natx \wedge Naty \wedge Natz \wedge Natw \wedge xPy \wedge wPz \rightarrow (x=w \leftrightarrow y=z)$

Demonstração: Segue-se directamente do lema 1.2. \square

$(a_{ind}^{Nat}): F0 \wedge P$ -*trans*^{Nat}- $F \rightarrow \forall x(Natx \rightarrow Fx)$ ⁹⁵

⁹⁵ Em que P -*trans*^{Nat}- $F \leftrightarrow_{def} \forall x \forall y (Natx \wedge Naty \wedge Fx \wedge xPy \rightarrow Fy)$

Demonstração: Suponhamos que $F0 \wedge P\text{-trans}^{\text{Nat}}\text{-}F \wedge \text{Nat}n$. Devemos demonstrar que Fn . Uma vez que $F0$, basta demonstrar que $0 < n \rightarrow Fn$.

Suponhamos portanto que $0 < n$. Então, pela definição de $<$, temos $\rightarrow Fn$. Considere-se o conceito $Gx \leftrightarrow_{\text{def}} Fx \wedge \text{Nat}x$. Suponhamos que $Gx \wedge xPy$. Pelo axioma (a^{Nat}) e pelo lema 1.2, temos $\text{Nat}y$. Segue-se que $\text{Nat}x \wedge \text{Nat}y \wedge Fx \wedge xPy$ e, dado que $P\text{-trans}^{\text{Nat}}\text{-}F$, que $Fy \wedge \text{Nat}y$, ou seja, Gy . Segue-se que $P\text{-trans}\text{-}G$. Mas $G0$, pelo que $\forall w(OPw \rightarrow Gw)$. Segue-se que $0 < n \wedge \forall w(OPw \rightarrow Gw) \wedge P\text{-trans}\text{-}G$ e, pela definição de $<$, que Gn e, pela definição de G , Fn . \square

APÊNDICE 1b:

A consistência de PH

O Teorema de Frege demonstra que **PH** interpreta **PA2**. Isto implica que qualquer interpretação de uma contradição em **PA2** pode ser transformada numa interpretação de uma contradição em **PH**. Em “The Consistency of Frege’s *Foundations of Arithmetic*”, George Boolos demonstrou o converso deste teorema demonstrando que **PH** é interpretável em **PA2**.⁹⁶ Fica desta forma demonstrada a equi-consistência entre **PA2** e **PH**.

A estratégia de Boolos é definir a função numérica # de forma a que a conceitos não equinumericos correspondam objectos diferentes e a conceitos equinumericos correspondam objectos iguais. Qualquer modelo de **PA2** tem no seu universo uma série infinita de objectos $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$. A dificuldade é que se a cada conceito verdadeiro de um número finito n de objectos fizermos corresponder o objecto a_n , os conceitos verdadeiros de um número infinito de objectos ficam sem número. A solução é “guardar” a_0 para os conceitos infinitos e fazer corresponder a cada conceito verdadeiro de n objectos o objecto a_{n+1} .

Em primeiro lugar definimos a relação $x < y$. Um objecto x é *menor que* um objecto y se e só se existir um objecto w diferente de zero tal que $x+w=y$:

$$x < y \leftrightarrow_{\text{def}} \exists w (w \neq \mathbf{0} \wedge x+w=y)$$

Por último definimos a relação $F \eta x$ de *enumeração* entre conceitos e objectos. Um conceito F é *enumerado* por um objecto x diferente de zero se e só se F é

⁹⁶ George Boolos, “The Consistency of Frege’s *Foundations of Arithmetic*” (1987) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.

equinúmero ao conceito *objecto menor que o predecessor de x*; F é enumerado pelo zero se e só se não existe nenhum x para o qual F seja equinúmero ao conceito *objecto menor que x*, ou seja, se e só se F for um conceito infinito:

$$F \eta x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists y (y P x \wedge F \approx [w: w < y]) \vee (\neg \exists y (F \approx [w: w < y]) \wedge x = \mathbf{0}).$$

Antes de avançarmos com as demonstrações definimos, para simplificar, as seguintes expressões:

$$x' = y \leftrightarrow_{\text{def}} x P y \quad ^{97}$$

$$\mathbf{FuncR} \leftrightarrow_{\text{def}} \forall x \exists ! y (x R y).$$

Princípio do Número Mínimo: $\exists x F x \rightarrow \exists m (F m \wedge \forall n (F n \wedge n \neq m \rightarrow m < n))$

Demonstração: Fixe-se F tal que $\exists x F x$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que F não tem mínimo, ou seja, que $\neg \exists m (F m \wedge \forall n (F n \wedge n \neq m \rightarrow m < n))$. Defina-se $G x \leftrightarrow_{\text{def}} \neg F x \wedge \neg \exists y (y < x \wedge F y)$.

Se $F \mathbf{0}$ então $\mathbf{0}$ seria o mínimo de F . Segue-se que $\neg F \mathbf{0}$ e, uma vez que não existem números menores que $\mathbf{0}$, que $G \mathbf{0}$.

Suponhamos que $G a \wedge a P b$.

Suponhamos que $F b$. Se $y < b \wedge y \neq b$, pela definição de $<$, teria que existir um c tal que $c \neq \mathbf{0} \wedge y + c = b$. Mas sendo $c \neq \mathbf{0}$, pelo axioma (**a2**), c teria um antecessor (único pelo axioma (**a3**)) d . Teríamos então, pela definição de $+$, que $a' = b = y + c = y + d' = (y + d)'$ e, pelo axioma (**a3**) $a = y + d$. Se $d = \mathbf{0}$ então teríamos $a = y$ e, dado que $\neg F a$, teríamos $\neg F y$. Por outro lado, se $d \neq \mathbf{0}$, teríamos $y < a$, e dado que $G a$, teríamos também $\neg F y$. Mas então b seria o mínimo de F . Segue-se que $\neg F b$.

⁹⁷ Esta definição é legitimada pelos axiomas (**a1**) e (**a3**) que garantem, respectivamente, a existência de uma imagem para a função $'$ e a sua unicidade.

Suponhamos agora que $\exists y(y < b \wedge Fy)$. Então, pela definição de $<$, $\exists c(c \neq 0 \wedge y + c = b)$. Pelo axioma (a2), c teria um antecessor (único pelo axioma (a3)) d . Teríamos então, pela definição de $+$, que $a' = b = y + c = y + d' = (y + d)'$ e, pelo axioma (a3) $a = y + d$. Se $d = 0$ então teríamos $a = y$ e, logo, Fa contradizendo Ga . Por outro lado, se $d \neq 0$, teríamos $\exists y(y < a \wedge Fy)$, mais uma vez contradizendo Ga . Segue-se que $\neg \exists y(y < b \wedge Fy)$.

Dos dois últimos parágrafos segue-se que Gb e, logo, dos três últimos segue-se que $P\text{-trans-}G$.

Temos então que $G0 \wedge P\text{-trans-}G$, o que implica, de acordo com o axioma (a_{ind}) que $\forall x Gx$ e, logo, que $\forall x \neg Fx$. Contradição. \square

Lema 2.1: \approx é uma relação de equivalência

Demonstração: A igualdade é uma bijecção entre qualquer conceito e ele próprio, pelo que $F \approx F$, ou seja, \approx é reflexiva. Por outro lado, se R é uma bijecção entre F e G então a relação inversa R^{-1} de R definida por $xR^{-1}y \leftrightarrow_{\text{def}} yRx$ é uma bijecção entre G e F . Segue-se que \approx é simétrica. Por último, se R é uma bijecção entre F e G e S é uma bijecção entre G e H então a composição de R e S definida por $x(S \circ R)y \leftrightarrow_{\text{def}} \exists z(Gz \wedge xRz \wedge zSy)$ é uma bijecção entre F e H . Segue-se que \approx é transitiva. \square

Lema 2.2: $[x: x < m] \approx [x: x < n] \rightarrow m = n$

Demonstração: Suponhamos que não. Pelo **Princípio do Número Mínimo** existe um mínimo n tal que existe um mínimo m com $m < n$ e com $[x: x < m] \approx [x: x < n]$. Seja R uma bijecção entre $[x: x < m]$ e $[x: x < n]$. Dado que $m < n$ temos $\exists x(x < n)$ e, porque R é uma bijecção, $\exists x(x < m)$. Segue-se que $m \neq 0 \neq n$. Mas então $m = j'$ e $n = k'$ para algum j e k . Então $j < k < n$. Seja b o único objecto tal que jRb e seja a o único objecto tal que

aRk . Então a relação $xR'y \leftrightarrow (xRy \wedge x \neq j \wedge y \neq k) \vee (x=a \wedge y=b)$ é uma bijecção entre $[x:x < j]$ e $[x:x < k]$ contradizendo o facto de n ser o mínimo. \square

Lema 2.3: $\neg [x:x=x] \approx [x:x < n]$

Demonstração: Suponhamos que não. Pelo **Princípio do Número Mínimo** existe um mínimo n tal que $[x:x=x] \approx [x:x < n]$. Seja R uma bijecção entre $[x:x=x]$ e $[x:x < n]$. Dado que $n \neq 0$, pelos axiomas (a₁) e (a₃) existe um único m tal que $n=m'$. Seja k o único objecto tal que kRm . Então $xR'y \leftrightarrow_{\text{def}} (xRy \wedge x < k) \vee (k \leq x \wedge \exists z (y=Sz \wedge xRz))$ é uma bijecção entre $[x:x=x]$ e $[x:x < m]$ contradizendo o facto de n ser o mínimo. \square

Lema 2.4: $F \approx [x:x=x] \vee \exists n (F \approx [x:x < n])$

Demonstração: Suponhamos que $\neg \exists n (F \approx [x:x < n])$. Devemos demonstrar que F é equinumerico com o domínio, ou seja, que existe uma bijecção entre F e o domínio. A estratégia é definir, para cada n , uma relação funcional R_n que enumera os primeiros n F 's. Para cada n existirá uma destas relações pois caso contrário teríamos $F \approx [x:x < n]$ para esse n . Os valores de duas relações R_n coincidem para os argumentos em que estão definidas pelo que será possível definir uma “supra-relação” Q (a união de todas as R_n) que será uma bijecção entre F e o domínio.

Digamos que uma relação binária R “enumera os primeiros n F 's” se e só se R é uma relação funcional cujo domínio é $[x:x < n]$, cujo contradomínio é um subconjunto de F , que preserva a ordem de $[x:x < n]$ e se uma imagem de um elemento a de $[x:x < n]$ for maior que um elemento b de F então existe um elemento c de $[x:x < n]$ menor que a e cuja imagem é b . Formalmente:

$$R\text{-enumera-}n \leftrightarrow_{\text{def}} \text{Func}R \wedge \forall a (\exists b (aRb) \leftrightarrow a < n) \wedge \forall a \forall b (aRb \rightarrow Fb) \wedge \\ \wedge \forall a \forall b \forall c \forall d (a < b \wedge aRc \wedge bRd \rightarrow c < d) \wedge \forall a \forall b \forall c (Fc \wedge aRb \wedge c < b \rightarrow \exists d (d < a \wedge dRc)).$$

Para a relação vazia $x \mathcal{O} y \leftrightarrow_{\text{def}} x \neq y$ temos \mathcal{O} -*enumera-0*. Se R -*enumera-n* então R' -*enumera-n'* em que $xR'y \leftrightarrow_{\text{def}} xRy \vee (x=n \wedge y=k)$ em que k é o mínimo elemento de F que não pertence ao contradomínio de R (este mínimo existe porque caso contrário teríamos $F \approx [x: x < n]$ via R). Por indução, para qualquer n , existe uma relação R tal que R -*enumera-n*.

Se R -*enumera-n* então R' -*enumera-n'* e, como $n \neq n'$, $\forall x (nRx \leftrightarrow nR'x)$. Por indução, para todos os $w < n$ temos $\forall x (wRx \leftrightarrow wR'x)$, ou seja, as relações funcionais coincidem para os argumentos em que estão definidas.

Defina-se $xQy \leftrightarrow_{\text{def}} \exists R (R\text{-enumera-}x' \wedge xRy)$. Então Q é uma relação funcional cujo domínio é $[x: x=x]$, cujo contradomínio é um subconjunto de F , que preserva a ordem de $[x: x=x]$ e para a qual, se existe um elemento c de F menor que a imagem de um elemento a de $[x: x=x]$, então existe um elemento b de $[x: x=x]$ menor que a para o qual bQc .

Suponhamos que $mQx \wedge nQx$. Se $m < n$ ou $n < m$ então $x < x$ pois Q preserva a ordem do seu domínio. Dado que a relação $x \leq y \leftrightarrow_{\text{def}} x < y \vee x=y$ é total⁹⁸ temos $m=n$. Segue-se que Q é injectiva.

⁹⁸ *Demonstração:* Defina-se $Gx \leftrightarrow_{\text{def}} \forall y (x \leq y \leq x)$. Demonstramos por indução que $\forall x Gx$.

Pelo axioma (a4) temos $\forall x (0+x=x)$ e, pela definição de $<$, temos $\forall x (0 \leq x)$. Segue-se que $G0$.

Suponhamos que $Ga \wedge aPb$. Fixe-se y . Pela definição de G temos $a \leq y \vee y \leq a$.

Se $a=y$ então yPb . Dos axiomas (a4) e (a5) segue-se $y+0'=(y+0)'=y'=b$ e, pela definição de $<$, temos $y < b$.

Se $a < y$ então, pela definição de $<$, existe um $k \neq 0$ tal que $a+k=y$. Dado que $k \neq 0$, o axioma (a2) implica que k tem um predecessor w . Mas então, pelos axiomas (a4) e (a5), temos $b+w=a'+w=(a+w)'=a+w'=a+k=y$. Se $w=0$ então $b=y$. Se $w \neq 0$ então $b < y$.

Resta demonstrar que Q é sobrejectiva, ou seja, que o seu contradomínio é F . Suponhamos que existe um n maior que a sua imagem (em Q). Seja m o mínimo tal objecto. Q preserva a ordem de $[x:x=x]$ pelo que, sendo m maior que a sua imagem, a imagem de m é maior que a imagem da imagem de m . Contradizendo o facto de m ser o mínimo tal objecto. Mas \leq é total pelo que qualquer n é menor ou igual à sua imagem. Suponhamos que Fx . Então x é menor ou igual à sua imagem. Se menor então tem que existir um k menor que x tal que a imagem de k é x . Se igual então a imagem de x é o próprio x . Em qualquer dos casos x é a imagem de algum objecto, ou seja, Q é sobrejectiva. \square

Lema 2.5: $\exists!x(F\eta x)$

Demonstração: Pelos lemas **2.2**, **2.3** e **2.4**. \square

Este último lema permite definir a função numérica $\#$ como a função que faz corresponder a cada conceito F o objecto x que o enumera:

$$\#F=x \leftrightarrow_{\text{def}} F\eta x.$$

Por fim, demonstramos **(ph)**:

(ph): $\#F=\#G \leftrightarrow F\approx G$

Se $y < a$ então, pela definição de $<$, existe um $k \neq 0$ com $y+k=a$. Dado que $k \neq 0$, o axioma **(a1)** implica que k tem sucessor w . Pelo axioma **(a2)** temos $w \neq 0$, pois w tem um predecessor. Pelos axiomas **(a4)** e **(a5)** temos $y+w=y+k'=(y+k)'=a'=b$ e, pela definição de $<$, $y < b$.

Segue-se que ***P-trans-G*** e, pelo axioma **(aind)** que $\forall x Gx$. \square

Demonstração: Se $\#F=0=\#G$, então, pela definição de $\#$, $\neg\exists y(F\approx[w:w<y])$ e $\neg\exists y(G\approx[w:w<y])$. Pelo lema **2.4** segue-se que $F\approx[x:x=x]\approx G$, e pelo lema **2.1**, $F\approx G$.

Se $\#F=n=\#G$ e $n\neq 0$, então, pela definição de $\#$, $\exists y(yPn\wedge F\approx[w:w<y])$ e $\exists y(yPn\wedge G\approx[w:w<y])$. Mas, por **(a3)**, os predecessores são únicos, logo, sendo m o predecessor de n , $F\approx[w:w<m]\approx G$, e pelo lema **2.1**, $F\approx G$.

Se $F\approx G$ e $\#F=n$, $n\neq 0$, então, pela definição de $\#$, $F\approx[w:w<m]$ em que m é o predecessor de n . Pelo lema **2.1**, $G\approx[w:w<m]$. Pela definição de $\#$, $\#G=n=\#F$.

Se $F\approx G$ e $\#F=0$, então, pela definição de $\#$, $F\approx[x:x=x]$. Pelo lema **2.1**, $G\approx[x:x=x]$.
Pela definição de $\#$, $\#G=0=\#F$. \square

APÊNDICE 2a:

Interpretação de Q em $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$

No que se segue vamos demonstrar (segundo o texto de Heck⁹⁹) que é possível interpretar a teoria **Q** (cujos axiomas são todos os axiomas de primeira-ordem de **PA2**) em $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$.

Apesar de ser possível interpretar **Q** em $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$, o mesmo não é verdade do importante axioma da indução (**a_{ind}**). Em **GG**, como vimos no Apêndice 1a, a relativização deste axioma ao conceito de número natural era uma consequência quase directa da definição dos números naturais como os números indutivos, a partir do sucessor do zero, relativamente a todos os conceitos, mais o próprio zero. Em $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$ não é possível definir o conceito de número natural desta forma pois na fórmula

$$\mathbf{Nat}(x): \quad \forall F(\forall w(\mathbf{OP}w \rightarrow Fw) \wedge \mathbf{P}\text{-trans-}F \rightarrow Fx) \vee x=0$$

ocorrem quantificadores de segunda-ordem o que impossibilita a utilização do axioma (**comp-pred**) para deduzir a existência do conceito verdadeiro apenas dos objectos dos quais ela é verdadeira.

Repare-se no entanto que, apesar de não ser possível definir em $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$ o conceito de número natural, nada nos impede de dizer que os números naturais são os objectos para os quais a fórmula **Nat**(*x*) é verdadeira. Daqui poderíamos concluir que a indução é de facto válida para os números naturais (apesar de não existir o

⁹⁹ Richard Heck, «The consistency of Predicative Fragments of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*» (1996) em *History and Philosophy of Logic*, 17, 1996.

conceito de número natural) uma vez que a relativização do axioma da indução (\mathbf{a}_{ind}) à fórmula $\mathbf{Nat}(x)$ é um teorema de $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$.

Podemos entretanto perguntar se as relativizações dos restantes axiomas de \mathbf{PA}_2 à fórmula $\mathbf{Nat}(x)$ também são teoremas de $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$. A resposta é negativa. Apesar de conseguirmos demonstrar que cada número natural tem um único predecessor (à excepção do zero) e um único sucessor não será possível demonstrar as relativizações dos axiomas (\mathbf{a}_1) e (\mathbf{a}_2) à fórmula $\mathbf{Nat}(x)$, ou seja, que o predecessor (se existir) e o sucessor de um número natural é sempre um número natural. As demonstrações dos axiomas ($\mathbf{a}_1^{\text{Nat}}$) e ($\mathbf{a}_2^{\text{Nat}}$) em \mathbf{PH} de nada nos servem aqui uma vez que nestas demonstrações é utilizado o facto dos números naturais serem indutivos em relação a conceitos definidos à custa do próprio conceito de número natural (ver Apêndice 1a). Um exemplo é o conceito $\mathbf{Fk} \leftrightarrow_{\text{def}} \exists z(z\mathbf{Pk}) \wedge \forall z(z\mathbf{Pk} \rightarrow \mathbf{Nat}z)$ definido no lema 1.6. Tínhamos então demonstrado que este conceito é verdadeiro de todos os números naturais uma vez que $\mathbf{F0}$, que $\forall w(\mathbf{OP}w \rightarrow \mathbf{F}w)$ e que $\mathbf{P-trans-F}$. Em $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$, apesar de podermos considerar a fórmula

$$\mathbf{For}(x): \exists w(w\mathbf{Pk}) \wedge \forall z(z\mathbf{Pk} \rightarrow \mathbf{Nat}(z))$$

e demonstrar que $\mathbf{For}(0)$, que $\forall w(\mathbf{OP}w \rightarrow \mathbf{For}(w))$ e que $\mathbf{For}(x) \wedge x\mathbf{P}y \rightarrow \mathbf{For}(y)$, não poderemos concluir que $\mathbf{Nat}(x) \rightarrow \mathbf{For}(x)$ uma vez que não temos qualquer garantia da existência de um conceito co-extensivo com $\mathbf{For}(x)$ e como tal não podemos recorrer ao facto de $\mathbf{Nat}(x) \rightarrow \forall F(\forall w(\mathbf{OP}w \rightarrow \mathbf{F}w) \wedge \mathbf{P-trans-F} \rightarrow \mathbf{F}x)$ para demonstrar $\mathbf{Nat}(x) \rightarrow \mathbf{For}(x)$. Uma solução para este problema seria incluir na definição dos números naturais, ou seja, na definição da fórmula $\mathbf{Nat}(x)$ a validade da indução sobre a fórmula $\mathbf{For}(x)$, ou seja, redefinir a fórmula $\mathbf{Nat}(x)$ da seguinte forma:

$$\mathbf{Nat}(x): (\forall F(\forall w(\mathbf{OP}w \rightarrow \mathbf{F}w) \wedge \mathbf{P-trans-F} \rightarrow \mathbf{F}x) \vee x=0) \wedge (\mathbf{For}(0) \wedge \forall a \forall b(\mathbf{For}(a) \wedge a\mathbf{P}b \rightarrow \mathbf{For}(b)) \rightarrow \mathbf{For}(x)).$$

Esta definição é, no entanto, circular uma vez que a fórmula **For**(*x*) foi definida em termos da fórmula **Nat**(*x*).

Compreende-se agora a força e importância do axioma impredicativo (**comp**) na interpretação de **PA**₂ em **PH**: ele permite definir os números naturais como os números cardinais para os quais a indução sobre *qualquer* conceito é válida, incluindo o próprio conceito de número natural ou conceitos definidos à sua custa.

O facto de não ser possível definir o conceito de número natural em **GG**^{Pred*} da mesma forma que o definimos em **GG** implica que não vai ser possível demonstrar as relativizações dos axiomas de **Q** a este conceito. O conceito em relação ao qual vamos demonstrar as relativizações dos axiomas de **Q** será o conceito **Card** de número cardinal.

Por outro lado, uma vez que os resultados de Dedekind em *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?* só são válidos no contexto da lógica de segunda-ordem *plena*, a interpretação de **Q** em **GG**^{Pred*} deve portanto incluir os axiomas (**a**₄),...,(**a**₇).

Axiomas de Q (a interpretar):

$$(a_1) \quad \exists y(xPy)$$

$$(a_2) \quad \exists y(yPx) \leftrightarrow x \neq 0$$

$$(a_3) \quad xPy \wedge wPz \rightarrow (x=w \leftrightarrow y=z)$$

$$(a_4) \quad x+0=x$$

$$(a_5) \quad yPw \wedge (x+y)Pz \rightarrow x+w=z$$

$$(a_6) \quad x \times 0=0$$

$$(a_7) \quad yPw \rightarrow x \times w=(x \times y)+x$$

Definições:

$$\#F =_{\text{def}} \wedge x. \exists G(x = \wedge G \wedge G \approx F)$$

$$\mathbf{Card}x \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F(x = \#F)$$

$$\mathbf{0} =_{\text{def}} \#[x : x \neq x]$$

$$xPy \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F \exists w(y = \#F \wedge Fw \wedge x = \#[z : Fz \wedge z \neq w]).$$

$$\langle x, y \rangle =_{\text{def}} \wedge [z : z = \wedge [w : w = x] \vee z = \wedge [w : w = x \vee w = y]]$$

$$\mathbf{Ad}(x, y, z) \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F \exists G(x = \#F \wedge y = \#G \wedge \neg \exists w(Fw \wedge Gw) \wedge z = \#[k : Fk \vee Gk]) \vee \\ \vee ((\neg \mathbf{Card}x \vee \neg \mathbf{Card}y) \wedge z = \wedge [x : x \neq x])$$

$$\mathbf{Mult}(x, y, z) \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F \exists G(x = \#F \wedge y = \#G \wedge z = \#[w : \exists a \exists b(Fa \wedge Fb \wedge w = \langle a, b \rangle)]) \vee \\ \vee ((\neg \mathbf{Card}x \vee \neg \mathbf{Card}y) \wedge z = \wedge [x : x \neq x]).$$

Teoremas:

$$\underline{(\text{ph})}: \#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$$

Demonstração: Suponhamos que $\#F = \#G$. Pela definição de $\#$ temos $\wedge x. (\exists H(x = \wedge H \wedge H \approx F)) = \wedge x. (\exists H(x = \wedge H \wedge H \approx G))$. Pelo axioma **(v-esq)** temos $\exists H(x = \wedge H \wedge H \approx F) \leftrightarrow \exists H(x = \wedge H \wedge H \approx G)$. Pela reflexividade de \approx temos $F \approx F$ e logo $\exists H(\wedge F = \wedge H \wedge H \approx G)$. Pelo axioma **(v-esq)** temos $Fw \leftrightarrow Hw$ e, logo, a relação de igualdade é uma bijecção entre F e H . Segue-se que $F \approx H$ e, pela transitividade de \approx , $F \approx G$.

Suponhamos agora que $F \approx G$. Se existe um conceito H tal que $x = \wedge H \wedge H \approx F$, pela transitividade de \approx temos $H \approx G$ e, logo, $H \approx G$. Pelas mesmas razões

$(x=\wedge H \wedge H \approx G) \rightarrow H \approx F$. Segue-se que $\exists H(x=\wedge H \wedge H \approx F) \leftrightarrow \exists H(x=\wedge H \wedge H \approx G)$, e, pelo axioma **(v-esq)**, que $\wedge x.(\exists H(x=\wedge H \wedge H \approx F)) = \wedge x.(\exists H(x=\wedge H \wedge H \approx G))$, ou seja, $\#F = \#G$. \square

Lema 3.1: $F \approx [w: \exists y(Fy \wedge w = \langle k, y \rangle)]$

Demonstração: A expressão-relacional **R** definida através da fórmula $xRy \leftrightarrow_{\text{def}} Fx \wedge y = \langle k, x \rangle$ é uma bijecção entre **F** e $[w: \exists y(Fy \wedge w = \langle k, y \rangle)]$. \square

(a1^{Card}): $\text{Card}x \rightarrow \exists y(\text{Card}y \wedge xPy)$

Demonstração: Suponhamos que **Card** x , ou seja, que $\exists F(x = \#F)$. Da definição do conceito **P** segue-se que $\forall F(\neg Fx \rightarrow \#FP \#[w: Fw \vee w = x])$. Por **(comp-pred)** podemos definir o conceito $\mathbf{G}w \leftrightarrow_{\text{def}} \exists y(Fy \wedge w = \langle x, y \rangle)$ e, pelo lema 3.1, temos $F \approx \mathbf{G}$. Por **(ph)** temos $x = \#F = \#\mathbf{G}$. Mas, da definição de par ordenado segue-se $\forall y(\langle x, y \rangle \neq \wedge z.(z \neq z))$ e, logo, $\neg \mathbf{G} \wedge z.(z \neq z)$. Segue-se que $(\#\mathbf{G})P(\#[w: \mathbf{G}w \vee w = \wedge z.(z \neq z)])$, ou seja, $xP(\#[w: \mathbf{G}w \vee w = \wedge z.(z \neq z)])$. Segue-se que $\exists y(\text{Card}y \wedge xPy)$. \square

(a2^{Card}): $\text{Card}x \rightarrow (\exists y(\text{Card}y \wedge yPx) \leftrightarrow x \neq 0)$

Demonstração: Suponhamos que **Card** x e que $\exists y(yPx)$. Pela definição de **P** temos $\exists y(\exists F \exists k(x = \#F \wedge Fk \wedge y = \#[z: Fz \wedge z \neq k]))$. Mas então $x = \wedge F$ e $\exists k Fk$. Se $F \approx [w: w \neq w]$ então $\exists R \exists ! z([w: w \neq w]z \wedge kRz)$ e, logo, $z \neq z$. Contradição. Segue-se que $\neg F \approx [w: w \neq w]$ e, por **(ph)**, $\#F \neq \#[w: w \neq w]$, ou seja, $x \neq 0$.

Suponhamos que **Card** x e que $x \neq 0$. Então $\exists F(x = \#F)$. Se $\forall k(\neg Fk)$ então qualquer relação é uma bijecção entre **F** e $[w: w \neq w]$ pelo que, por **(ph)**, temos $x = \#F = \#[w: w \neq w] = 0$ o que contradiz a suposição que $x \neq 0$. Segue-se que existe um

objecto k tal que Fk . Mas então, pela definição de P , temos $\#[w:Fw \wedge w \neq k]P\#F$.

Segue-se que $\exists y(\mathbf{Card}y \wedge yPx)$. \square

(a^{Card}): $\mathbf{Card}a \wedge \mathbf{Card}b \wedge \mathbf{Card}c \wedge \mathbf{Card}d \wedge aPb \wedge cPd \rightarrow (a=c \leftrightarrow b=d)$

Demonstração: Suponhamos que $\mathbf{Card}a \wedge \mathbf{Card}b \wedge \mathbf{Card}c \wedge \mathbf{Card}d \wedge aPb \wedge cPd$ e que $a=c$. Pela definição de P sabemos que existem dois conceitos F e G e dois objectos k e q tal que $b = \#F \wedge Fk \wedge a = \#[z:Fz \wedge z \neq k]$ e $d = \#G \wedge Gq \wedge c = \#[z:Gz \wedge z \neq q]$. Segue-se que $\#[z:Fz \wedge z \neq k] = \#[z:Gz \wedge z \neq q]$. Por (ph) temos $[z:Fz \wedge z \neq k] \approx [z:Gz \wedge z \neq q]$. Pela definição de \approx existe uma bijecção R entre estes dois conceitos. Defina-se $xQy \leftrightarrow_{\text{def}} xRy \vee (x=k \wedge y=q)$. Mostramos que Q é uma bijecção entre F e G . Se Fx e $x \neq k$ então, uma vez que R é uma bijecção, $\exists!y(Hy \wedge y \neq q \wedge xRy)$. Segue-se que xQy . Se xQw então $xRw \vee (x=k \wedge w=q)$. Mas $x \neq k$ pelo que xRw . Como R é uma bijecção temos $w=y$. Segue-se que $\forall \exists!y(xQy)$. Pelas mesmas razões temos $\forall y \exists!x(xQy)$. Segue-se que Q é uma bijecção entre F e G . Pela definição de \approx temos $F \approx G$ e, por (ph), $b = \#F = \#G = d$.

Suponhamos agora que $\mathbf{Card}a \wedge \mathbf{Card}b \wedge \mathbf{Card}c \wedge \mathbf{Card}d \wedge aPb \wedge cPd$ e que $b=d$. Pela definição de P sabemos que existe um conceito F e um objecto k tal que $b = \#F \wedge Fk \wedge a = \#[z:Fz \wedge z \neq k]$ e um conceito G e um objecto q tal que $d = \#G \wedge Gq \wedge c = \#[z:Gz \wedge z \neq q]$. Mas então $\#F = \#G$ e por (ph), $F \approx G$. Segue-se que existe uma bijecção R entre F e G . Se kRq então R também é uma bijecção entre $[z:Fz \wedge z \neq k]$ e $[z:Gz \wedge z \neq q]$. Se, pelo contrário, existem dois objectos w e z tal que $kRw \wedge zRq$ com $w \neq q \wedge z \neq k$ então a relação Q definida por $xQy \leftrightarrow_{\text{def}} (xRy \wedge x \neq k \wedge y \neq q) \vee (x=z \wedge w=q)$ é uma bijecção entre $[z:Fz \wedge z \neq k]$ e $[z:Gz \wedge z \neq q]$. Segue-se que $[z:Fz \wedge z \neq k] \approx [z:Gz \wedge z \neq q]$ e, por (ph), que $a = \#[z:Fz \wedge z \neq k] = \#[z:Gz \wedge z \neq q] = c$.

\square

Antes de demonstrarmos as relativizações dos axiomas (a5), (a6), (a7) e (a8) devemos definir as operações + e \times que ainda se encontram por definir. Para tal devemos demonstrar, em primeiro lugar, que $\exists!z\mathbf{Ad}(x,y,z)$ e que $\exists!z\mathbf{Mult}(x,y,z)$ ou seja que as relações **Ad** e **Mult** podem ser interpretadas como operações e, em segundo lugar, que $\mathbf{Card}x \wedge \mathbf{Card}y \wedge \mathbf{Ad}(x,y,w) \wedge \mathbf{Mult}(x,y,z) \rightarrow \mathbf{Card}w \wedge \mathbf{Card}z$, ou seja que **Card** é um conceito “fechado” em relação a estas operações.

Lema 3.2: $\exists!z\mathbf{Ad}(x,y,z)$

Demonstração: Se $\neg\mathbf{Card}x \vee \neg\mathbf{Card}y$ então, pela definição de **Ad**, $z = \wedge[w:w \neq w]$ é o único elemento para o qual $\mathbf{Ad}(x,y,z)$. Suponhamos portanto que $\mathbf{Card}x \wedge \mathbf{Card}y$. Primeiro demonstramos que $\exists z\mathbf{Ad}(x,y,z)$. Pela definição de **Card** existem dois conceitos F e G tal que $x = \#F \wedge y = \#G$. Definam-se os conceitos $Jx \leftrightarrow_{\text{def}} [w: \exists u(Fu \wedge w = \langle 0, u \rangle)]$ e $Kx \leftrightarrow_{\text{def}} [w: \exists u(Gu \wedge w = \langle \#[r:r=0], u \rangle)]$. Pelo lema 3.1 temos $J \approx F$ e $K \approx G$ e, por (ph), $x = \#F = \#J$ e $y = \#G = \#K$. Por outro lado, uma vez que $\exists r(r=0)$ e $\neg\exists r(r \neq r)$, não existe qualquer bijecção entre os conceitos $[r:r=0]$ e $[r:r \neq r]$. Por (ph) temos $0 = \#[r:r \neq r] \neq \#[r:r=0]$. Mas, uma vez que $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle \rightarrow (a=c \wedge b=d)$ ¹⁰⁰, os

¹⁰⁰ *Demonstração:* Se $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle$ pela definição de \langle , \rangle temos $\wedge[z: z = \wedge[w:w=a] \vee \vee z = \wedge[w:w=a \vee w=b]] = \wedge[z: z = \wedge[w:w=c] \vee \vee z = \wedge[w:w=c \vee w=d]]$. Pelo axioma (v-esq) temos $\forall z((z = \wedge[w:w=a] \vee \vee z = \wedge[w:w=a \vee w=b]) \leftrightarrow (z = \wedge[w:w=c] \vee \vee z = \wedge[w:w=c \vee w=d]))$. Segue-se que $\wedge[w:w=a] = \wedge[w:w=c] \wedge \wedge[w:w=a \vee w=b] = \wedge[w:w=c \vee w=d]$ ou que $\wedge[w:w=a] = \wedge[w:w=c \vee w=d] \wedge \wedge[w:w=a \vee w=b] = \wedge[w:w=c]$. Por (v-esq) isto implica que ou

(i) $a=c \wedge ((a=c \wedge b=d) \vee (a=d \wedge b=c))$ ou

(ii) $a=c \wedge a=d \wedge c=a \wedge c=b$.

conceitos J e K não têm qualquer objecto em comum. Segue-se, pela definição de **Ad** que **Ad**($x, y, \#[w:Jw \vee Kw]$).

Demonstramos por fim que $\#[w:Jw \vee Kw]$ é o único z tal que **Ad**(x, y, z). Suponhamos que **Ad**(x, y, z). Da definição de **Ad** segue-se que existem dois conceitos L e M tais que $x = \#L \wedge y = \#M \wedge \neg \exists w (Lw \wedge Mw) \wedge z = \#[w:Lw \vee Mw]$. Dado que $\#L = x = \#J$ e $\#M = y = \#K$ segue-se, por (ph), que existe uma bijecção R entre L e J e uma bijecção S entre M e K . Defina-se a relação T através da fórmula $aTb \leftrightarrow_{\text{def}} (La \wedge Jb \wedge aRb) \vee (Ma \wedge Kb \wedge aSb)$. Então T é uma bijecção entre os conceitos $[w:Lw \vee Mw]$ e $[w:Jw \vee Kw]$.¹⁰¹ De (ph) segue-se que $z = \#[w:Lw \vee Mw] = \#[w:Jw \vee Kw]$. \square

Lema 3.3: $\exists! z \text{Mult}(x, y, z)$

Demonstração: Se $\neg \text{Card}x \vee \neg \text{Card}y$ então, pela definição de **Mult**, $z = \wedge [w:w \neq w]$ é o único elemento para o qual **Mult**(x, y, z). Suponhamos portanto que $\text{Card}x \wedge \text{Card}y$. Primeiro demonstramos que $\exists z \text{Mult}(x, y, z)$. Pela definição de **Card** existem dois conceitos F e G tal que $x = \#F \wedge y = \#G$. Mas então, pela definição de **Mult** temos **Mult**($x, y, \#[w:\exists a \exists b (Fa \wedge Fb \wedge w = \langle a, b \rangle)]$).

Demonstramos agora que $\#[w:\exists a \exists b (Fa \wedge Fb \wedge w = \langle a, b \rangle)]$ é o único z tal que **Ad**(x, y, z). Suponhamos que **Ad**(x, y, t). Da definição de **Mult** segue-se que existem

Repare-se que (ii) implica que $d = a = c = b$. Suponhamos então que (i). Então $a = c$. Mas $(a = c \wedge b = d) \rightarrow b = d$ e $(a = c \wedge a = d \wedge b = c) \rightarrow b = d$. Segue-se (i) implica que $a = c$ e que $b = d$.

Segue-se que $a = c \wedge b = d$. \square

¹⁰¹ *Demonstração:* Suponhamos que Lx . Então existe um único y com Jy e xRy . Logo xTy . Se xTw então, pela definição de T e uma vez que $\neg Mx$ (porque $\neg \exists k (Lk \wedge Mk) \wedge Lx$) temos $Jw \wedge xRw$. Mas então $w = y$. Segue-se que $\exists! y (xTy)$. Pelas mesmas razões, se $Mx \rightarrow \exists! y (xTy)$. Segue-se que $Lx \vee Mx \rightarrow \exists! y (xTy)$. Um raciocínio semelhante mostra que $Jy \vee Ky \rightarrow \exists! x (xTy)$. \square

dois conceitos J e K tais que $x=\#J \wedge y=\#K \wedge t=\#[w:\exists a \exists b(Ja \wedge Kb \wedge w=\langle a,b \rangle)]$. Dado que $\#J=x=\#F$ e $\#K=y=\#G$ segue-se, por (ph), que existe uma bijecção R entre F e J e uma bijecção S entre G e K . Defina-se a relação T através da fórmula $nTm \leftrightarrow_{\text{def}} \exists a \exists b(Fa \wedge Gb \wedge n=\langle a,b \rangle) \wedge \exists c \exists d(Jc \wedge Kd \wedge m=\langle c,d \rangle) \wedge aRc \wedge bSd$. Então T é uma bijecção entre os conceitos $[w:\exists a \exists b(Fa \wedge Gb \wedge w=\langle a,b \rangle)]$ e $[w:\exists a \exists b(Ja \wedge Kb \wedge w=\langle a,b \rangle)]$.¹⁰² De (ph) segue-se que $t=\#[w:\exists a \exists b(Ja \wedge Kb \wedge w=\langle a,b \rangle)]=\#[w:\exists a \exists b(Fa \wedge Gb \wedge w=\langle a,b \rangle)]$. \square

Lema 3.4: $\text{Card}x \wedge \text{Card}y \wedge \text{Ad}(x,y,w) \wedge \text{Mult}(x,y,z) \rightarrow \text{Card}w \wedge \text{Card}z$

Demonstração: Segue-se directamente do lema 3.2 e do lema 3.3 em que $\text{Ad}(x,y,\#[w:Jw \vee Kw])$ e $\text{Mult}(x,y,\#[w:\exists a \exists b(Fa \wedge Gb \wedge w=\langle a,b \rangle)])$. \square

Podemos agora definir as operações $+$ e \times :

$$x+y=z \leftrightarrow_{\text{def}} \text{Ad}(x,y,z)$$

$$x \times y=z \leftrightarrow_{\text{def}} \text{Mult}(x,y,z)$$

e prosseguir com as demonstrações.

¹⁰² *Demonstração:* Suponhamos que $\exists a \exists b(Fa \wedge Gb \wedge w=\langle a,b \rangle)$. Uma vez que R é uma bijecção entre F e J e S é uma bijecção entre G e K segue-se que existe um único c e um único d tais que $Jc \wedge Kd$. Mas então $wT\langle c,d \rangle$. Suponhamos que wTk então, pela definição de T ,

(a4^{Card}): $\text{Card}x \rightarrow x+0=x$

Demonstração: Suponhamos que **Card** x . Pela definição de **Card** existe um conceito F com $x=\#F$. Pela definição de **0**, $0=\#[w:w\neq w]$. Uma vez que $\neg\exists k(k\neq k)$ segue-se que $\neg\exists k(Fk\wedge k\neq k)$. Mas então, pela definição de **Ad** temos **Ad** $(x,0,\#[w:Fw\vee w\neq w])$ e pela definição de $+$ temos $x+0=\#[w:Fw\vee w\neq w]$. Resta demonstrar que $\#[w:Fw\vee w\neq w]=x$. Para este efeito repare-se que a igualdade é uma bijecção entre os conceitos F e $[w:Fw\vee w\neq w]$. Por **(ph)** temos $x=\#F=\#[w:Fw\vee w\neq w]$. \square

(a5^{Card}): $\text{Card}x\wedge\text{Card}y\wedge\text{Card}w\wedge yPw \rightarrow (x+y)P(x+w)$

Demonstração: Suponhamos que **Card** $x\wedge\text{Card}y\wedge\text{Card}w\wedge yPw$. Devemos demonstrar que $(x+y)P(x+w)$. Pela definição de $+$ existem dois conceitos disjuntos F' e G' tal que $x=\#F'\wedge w=\#G'\wedge x+w=\#[z:F'z\vee G'z]$. Pela definição de **P** existe um conceito J e um objecto k tal que $w=\#J\wedge Jk\wedge y=\#[z:Jz\wedge z\neq k]$. Mas $\#J=w=\#G'$ pelo que, por **(ph)**, temos $J\approx G'$ e, uma vez que Jk , existe um objecto q com $G'q$. Mas então $[z:Jz\wedge z\neq k]\approx[z:G'z\wedge z\neq q]$ e, por **(ph)**, $y=\#[z:Jz\wedge z\neq k]=\#[z:G'z\wedge z\neq q]$. Por outro lado, uma vez que $G'q$ temos $G'q\vee F'q$ e, pela definição de **P**, temos

$$(*) \quad \#[z:(F'z\vee G'z)\wedge z\neq q]P(x+w).$$

Mas $x=\#F'$ e $y=\#[z:G'z\wedge z\neq q]$ o que implica, pela definição de $+$ e pelo facto de F' e $[z:G'z\wedge z\neq q]$ serem conceitos disjuntos, que $x+y=\#[z:F'z\vee(G'z\wedge z\neq q)]$. Por outro lado temos $\neg F'q$ porque $G'q$ e porque F' e G' são conceitos disjuntos. Segue-se que $\forall z((F'z\vee(G'z\wedge z\neq q))\leftrightarrow((F'z\vee G'z)\wedge z\neq q))$ pelo que a igualdade é uma bijecção entre os

$\exists c'\exists d'(Jc'\wedge Kd'\wedge k=\langle c',d'\rangle)\wedge Rc'\wedge Sd'$. Mas R e S são bijecções pelo que $c'=c\wedge d'=d$. Logo, $k=\langle c',d'\rangle=\langle c,d\rangle$. Um raciocínio semelhante demonstra que $\exists!w(wTk)$. \square

conceitos $[z:F'z \vee (G'z \wedge z \neq q)]$ e $[z:(F'z \vee G'z) \wedge z \neq q]$. Segue-se, por (ph), que $x+y = \#[z:F'z \vee (G'z \wedge z \neq q)] = \#[z:(F'z \vee G'z) \wedge z \neq q]$ e, por (*), $(x+y)P(x+w)$. \square

(a6^{Card}): $\text{Card}x \rightarrow x \times 0 = 0$

Demonstração: Uma vez que $\text{Card}x$, existe um conceito F com $x = \#F$. Por outro lado, pela definição de 0 , temos $0 = \#[z:z \neq z]$. Segue-se, da definição de \times , que $x \times 0 = \#[z:\exists a \exists b (Fa \wedge [z:z \neq z]b \wedge z = \langle a, b \rangle)]$. Mas uma vez que $\neg \exists w (w \neq w)$ temos $\neg \exists w (\exists a \exists b (Fa \wedge [z:z \neq z]b \wedge w = \langle a, b \rangle))$ pelo que qualquer relação é uma bijecção entre os conceitos $[z:z \neq z]$ e $[z:\exists a \exists b (Fa \wedge [z:z \neq z]b \wedge z = \langle a, b \rangle)]$. Segue-se, por (ph), que $x \times 0 = \#[z:\exists a \exists b (Fa \wedge [z:z \neq z]b \wedge z = \langle a, b \rangle)] = \#[z:z \neq z] = 0$. \square

(a7^{Card}): $\text{Card}x \wedge \text{Card}y \wedge \text{Card}w \wedge yPw \rightarrow x \times w = (x \times y) + x$

Demonstração: Suponhamos que $\text{Card}x \wedge \text{Card}y \wedge \text{Card}w \wedge yPw$. Então, pela definição de Card , existe um conceito F tal que $x = \#F$. Pela definição de P existe um conceito W e um objecto k tal que $w = \#W \wedge Wk \wedge y = \#[z:Wz \wedge z \neq k]$. Defina-se $Mz \leftrightarrow_{\text{def}} \exists a \exists b (Fa \wedge Wb \wedge z = \langle a, b \rangle)$ e $Lz \leftrightarrow_{\text{def}} Mz \wedge \forall a (z \neq \langle a, k \rangle)$. Pela definição de \times temos $x \times w = \#M$ e $x \times y = \#L$. Pela definição de $+$ existem conceitos disjuntos G e H com $x \times y = \#G \wedge x = \#H$ tais que $(x \times y) + x = \#[z:Gz \vee Hz]$. Mas então $\#G = x \times y = \#L$ e $\#H = x = \#F$ pelo que, por (ph), $G \approx L$ e $H \approx F$. Segue-se que existe uma bijecção R entre L e G e uma bijecção S entre F e H . Mas então a relação $mTn \leftrightarrow_{\text{def}} (Lm \wedge Gn \wedge mRn) \vee \exists a (Fa \wedge m = \langle a, k \rangle \wedge aSn)$ é uma bijecção entre M e $[z:Gz \vee Hz]$ ¹⁰³, pelo que, por (ph), $x \times w = \#M = \#[z:Gz \vee Hz] = (x \times y) + x$. \square

¹⁰³ *Demonstração:* Suponhamos que Mz . Então existem dois objectos a e b tal que $Fa \wedge Wb \wedge z = \langle a, b \rangle$. Se $b \neq k$ então Lz (porque $Mz \wedge \forall a (z \neq \langle a, k \rangle)$) pelo que existe um único objecto z' com

APÊNDICE 2b:

A consistência de GG^{Pred^*}

Antes de demonstrarmos o resultado de Heck, vejamos porque é que (**com-pred**) não permite a interpretação do Paradoxo de Russell.

Em primeiro lugar definimos a *Extensão de Russell*, r , como a extensão do conceito *objecto que não pertence a si próprio*:

$$r =_{\text{def}} \wedge x.(x \notin x)$$

em que

$$x \in y \leftrightarrow_{\text{def}} \exists F(y = \wedge F \wedge Fx).$$

Tentemos demonstrar que $r \in r \leftrightarrow r \notin r$:

$Gz' \wedge zRz'$. Segue-se que zTz' . Se zTz'' então, pela definição de T , $Gz'' \wedge zRz''$. Mas R é uma bijecção pelo que $z' = z''$. Segue-se que $Mz \wedge b \neq k \rightarrow \exists! z'(zTz')$. Se, pelo contrário, $b = k$, então, pela definição de T , zTz' para o único objecto z' para o qual aSz' . Se zTz'' então, pela definição de T , aSz'' pelo que, uma vez que S é uma bijecção, temos $z' = z''$. Segue-se que $Mz \wedge b = k \rightarrow \exists! z'(zTz')$. Segue-se que $Mz \rightarrow \exists! z'(zTz')$.

Suponhamos que $Gz \vee Hz$. Se Gz então existe um único z' com $Lz' \wedge z'Rz$ e, pela definição de T , $z'Tz$. Se $z''Tz$ então $(Lz'' \wedge Gz \wedge z''Rz) \vee \exists a(Fa \wedge z'' = \langle a, k \rangle \wedge aSz)$. Mas se existisse um objecto a tal que $Fa \wedge aSz$ teríamos Hz (uma vez que S é uma bijecção entre F e H) e, logo, $Gz \wedge Hz$ contradizendo o facto de G e H serem conceitos disjuntos. Segue-se que $Lz'' \wedge Gz \wedge z''Rz$ e, como R é uma bijecção e $z'Rz$, $z'' = z'$. Segue-se que $Gz \rightarrow \exists! z'(z'Tz)$. Se, pelo contrário, temos Hz então existe um único a com $Fa \wedge zSa$. Mas então para $z' = \langle a, k \rangle$ temos $z'Tz$. Se $z''Tz$ então $(Lz'' \wedge Gz \wedge z''Rz) \vee \exists a(Fa \wedge z'' = \langle a, k \rangle \wedge aSz)$ mas como G e H são disjuntos e Hz temos $\neg Gz$ e, logo, existe um objecto b com $Fb \wedge z'' = \langle b, k \rangle \wedge bSz$. Mas S é uma bijecção pelo que $b = a$ e, logo, $z'' = \langle b, k \rangle = \langle a, k \rangle = z'$. Segue-se que $Hz \rightarrow \exists! z'(z'Tz)$. Segue-se que $Gz \vee Hz \rightarrow \exists! z'(z'Tz)$. \square

Suponhamos que $r \in r$. Pela definição de r , $\forall x.(x \notin x) \in \forall x.(x \notin x)$. Pela definição de \in , $\exists F(\forall x.(x \notin x) = \neg F \wedge F \forall x.(x \notin x))$, ou seja, $\forall x.(x \notin x) \notin \forall x.(x \notin x)$. Logo, $r \notin r$. Contradição.

Suponhamos agora que $r \notin r$. Pela definição de r , $\forall x.(x \notin x) \notin \forall x.(x \notin x)$. Pela definição de \in , $\neg \exists F(\forall x.(x \notin x) = \neg F \wedge F \forall x.(x \notin x))$. Se o conceito $[x: x \notin x]$ existisse, então seguir-se-ia que $\neg [x: x \notin x] \forall x.(x \notin x)$, ou seja, $\neg \forall x.(x \notin x) \notin \forall x.(x \notin x)$. Eliminando a dupla negação obteríamos $r \in r$. No entanto, o axioma (**comp-pred**) não nos permite inferir a existência deste conceito e, logo, impede a interpretação do Paradoxo de Russell.

Repare-se que uma consequência deste raciocínio é que, em primeiro lugar, r não pertence a si próprio, e, em segundo lugar, r , apesar de ser uma extensão de uma fórmula, não é a extensão de *nenhum* conceito, ou seja $\neg \exists F(r = \neg F)$.

Antes de demonstrarmos a consistência de $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$ começamos por demonstrar a consistência da teoria $\mathbf{GG}^{\text{Pred}}$ que se obtém a partir de \mathbf{GG} substituindo o axioma (**comp**) por (**comp-pred**) (sem alterar o axioma (**v**)). A única diferença entre as teorias $\mathbf{GG}^{\text{Pred}}$ e $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$ é, portanto, que a primeira tem o a versão habitual do axioma (**v**) e a segunda tem a versão esquemática (**v-esq**).

Construímos um modelo M para $\mathbf{GG}^{\text{Pred}}$ cujo domínio de primeira-ordem são os números naturais. A demonstração será efectuada nos seguintes passos:

(a) Atribuímos uma denotação a todos os termos para extensões (doravante TE's) que não contêm nem quantificadores de segunda-ordem nem predicados;

(b) Definimos o domínio de segunda-ordem de M ;

(c) Atribuímos uma denotação a todos os TE's que contêm predicados mas que não contêm quantificadores de segunda-ordem;

(d) Atribuímos uma denotação a todos os TE's que contêm quantificadores de segunda-ordem;

(e) Demonstramos que M satisfaz (**comp-pred**);

(f) Demonstramos que M satisfaz (\mathbf{v}) .

(a) A denotação dos TE's sem predicados nem quantificadores de segunda-ordem.

Sem perda de generalidade assumimos que a linguagem contém uma constante n para cada número natural n . Definimos o *grau* dos TE's que não contêm nem predicados nem quantificadores de segunda-ordem da seguinte forma. Se $\mathbf{A}(x)$ é uma fórmula em que não ocorre nenhum TE então o *grau* de $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ é 0. Se $\mathbf{A}(x)$ contém TE's de grau n mas não contém nenhum TE de grau superior a n então o grau de $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ é $n+1$. Ordenemos todos os TE's sem predicados nem quantificadores de segunda ordem numa sequência $\omega \times \omega$, tal que, para cada n , na sequência $n \times \omega$ encontram-se todos os TE's de grau n . Suponhamos que $f: \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ é uma função injectiva. Definimos $g(m,n) = 2 \times f(m,n)$. Atribuimos ao TE que se encontra na posição $(0,0)$ a denotação $g(0,0)$. Suponhamos que $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ é o TE que se encontra na posição (m,n) e que já atribuimos uma denotação a todos os TE's que se encontram em posições anteriores. Se existe um TE $\lceil \mathbf{B}(x) \rceil$ numa posição anterior a (m,n) , tal que M satisfaz $\lceil \forall x(\mathbf{B}(x) \leftrightarrow \mathbf{A}(x)) \rceil$, então atribuimos a $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ a denotação de $\lceil \mathbf{B}(x) \rceil$, caso contrário atribuimos a $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ o número $g(m,k)$ para o qual todos os números $g(m,x)$ com $x < k$ já foram atribuídos a algum TE. ¹⁰⁴

¹⁰⁴ Repare-se que, se nem $\mathbf{B}(x)$ nem $\mathbf{A}(x)$ contêm, nem TE's de grau superior a $m-1$, nem predicados, nem quantificadores de segunda ordem, então, por suposição, todas as expressões da fórmula $\lceil \forall x(\mathbf{B}(x) \leftrightarrow \mathbf{A}(x)) \rceil$ já foram interpretadas por M , e logo, a própria fórmula.

(b) O domínio de segunda-ordem de M.

Definimos o domínio de segunda-ordem de M como o conjunto dos conjuntos de números naturais definíveis por fórmulas $\mathbf{A}(x)$ que não contêm nem predicados nem quantificadores de segunda ordem, ou seja, todos os conjuntos α , tal que existe uma fórmula $\mathbf{A}(x)$ sem predicados nem quantificadores de segunda-ordem, para a qual $n \in \alpha \Leftrightarrow M$ satisfaz $\lceil \mathbf{A}(n) \rceil$, para todos os nomes n de números naturais.¹⁰⁵

(c) A denotação de TE's com predicados mas sem quantificadores de segunda-ordem.

Suponhamos que $\mathbf{A}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, x)$ é uma fórmula que contém os predicados $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ mas que não contém nenhum quantificador de segunda-ordem. Suponhamos também que M atribui a cada \mathbf{P}_i , como denotação, um conceito (conjunto de números naturais) C_i pertencente ao seu universo de conceitos. Da definição do universo de conceitos de M segue-se que, para cada i , existe uma fórmula $\mathbf{A}_i(x)$, sem predicados nem quantificadores de segunda-ordem, tal que

$$n \in C_i \Leftrightarrow M \text{ satisfaz } \lceil \mathbf{A}_i(n) \rceil,$$

para todos nomes n de números naturais. Mas então, para qualquer n , M satisfaz $\lceil \mathbf{A}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, n) \rceil$ se e só se M satisfaz $\lceil \mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, n) \rceil$, ou seja, M satisfaz $\lceil \forall x (\mathbf{A}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, x) \leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, x)) \rceil$. Mas $\mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, x)$ não contém predicados nem quantificadores de segunda ordem, pelo que já atribuímos ao TE $\lceil \wedge \mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, x) \rceil$ uma denotação na alínea (a). Atribuímos a $\lceil \wedge \mathbf{A}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, x) \rceil$ a denotação de $\lceil \wedge \mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, x) \rceil$.

¹⁰⁵ Repare-se que, mais uma vez, M interpreta todas as frases $\lceil \mathbf{A}(n) \rceil$ desde que $\mathbf{A}(x)$ não contenha predicados nem quantificadores de segunda ordem.

(d) A denotação de TE's com quantificadores de segunda ordem.

Uma vez que o axioma (v) não regula TE's deste género, atribuímos a todos estes TE's o número 0 como denotação.

(e) M satisfaz (comp-pred).

Se $A(x)$ é uma fórmula que não contém nem predicados nem quantificadores de segunda-ordem, então pela definição do universo dos conceitos de M, existe um conceito (conjunto de números naturais) C tal que, para qualquer n ,

$$n \in C \Leftrightarrow M \text{ satisfaz } [A(n)].$$

Logo, M satisfaz $[\exists F \forall x (Fx \leftrightarrow A(x))]$.

Se $A(P_1, \dots, P_n, x)$ é uma fórmula que contém os predicados P_1, \dots, P_n mas que não contém nenhum quantificador de segunda ordem, então, como vimos em (c), existem fórmulas $A_i(x)$, sem predicados nem quantificadores de segunda ordem, tal que M satisfaz $[\forall x (A(P_1, \dots, P_n, x) \leftrightarrow A(A_1, \dots, A_n, x))]$. Segue-se que M satisfaz $[\exists F \forall x (Fx \leftrightarrow A(A_1, \dots, A_n, x))]$, e logo, também satisfaz $[\exists F \forall x (Fx \leftrightarrow A(P_1, \dots, P_n, x))]$.

Isto demonstra que M satisfaz (comp-pred).

(f) M satisfaz (v).

Este resultado segue-se directamente da forma como atribuímos, nas alíneas (a) e (c), denotações aos TE's que não contêm quantificadores de segunda ordem, e da definição do universo dos conceitos (conjuntos de números naturais) de M. \square

Na teoria $\mathbf{GG}^{\text{Pred}}$, o axioma (v) apenas regula TE's que resultam da aplicação do operador " \wedge " a fórmulas sem quantificadores de segunda-ordem. Se tivéssemos o

axioma (**comp**), o axioma (**v**) regularia (indirectamente) todos os TE's. Porém, uma vez que só temos (**comp-pred**), (**v**) só regula (directa ou indirectamente) TE's *sem quantificadores de segunda-ordem*. Foi por esta razão que nos foi permitido atribuir na alínea (d) o número 0 como denotação a todos os TE's com quantificadores de segunda-ordem.

Ao contrário de (**v**), o axioma esquemático (**v-esq**) regula todo o tipo de TE's. No que se segue vamos demonstrar que a teoria $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$, que, como vimos, se obtém substituindo a partir de $\mathbf{GG}^{\text{Pred}}$ substituindo o axioma (**v**) pela sua versão esquemática (**v-esq**) também é consistente.

A demonstração é em tudo idêntica à demonstração da consistência de $\mathbf{GG}^{\text{Pred}}$ à excepção da alínea (d). Como é óbvio, atribuir a todos os TE's o número 0 como denotação torna o axioma (**v-esq**) falso em M. Devemos portanto atribuir números naturais a todos os TE's com quantificadores de segunda ordem, de forma a respeitar esta versão esquemática do axioma (**v**).

Definimos o *nível* de um TE da seguinte forma. Se $\mathbf{A}(x)$ é uma fórmula sem quantificadores de segunda ordem, então o *nível* de $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ é 0. Se $\mathbf{A}(x)$ contém quantificadores de segunda ordem mas não contém nenhum TE que contenha quantificadores de segunda ordem então o *nível* de $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ é 1. Se $\mathbf{A}(x)$ contém TE's de *nível* n mas não contém TE's de *nível* superior a n então o *nível* de $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ é $n+1$. Ordenemos todos os TE's numa sequência $\omega \times \omega$ tal que na sequência $n \times \omega$ encontram-se todos os TE's de nível n . Definimos $h(m,n)=g(m,n)+1$ em que $g:\mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ é a função que definimos na alínea (a).

Nas alíneas (a) e (c) atribuímos uma denotação a todos os TE's de nível 0. Suponhamos que $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ é o TE da posição (m,n) , e que já atribuímos uma denotação a todos os TE's anteriores. Se existe uma fórmula $\mathbf{B}(x)$ tal que o TE

$\lceil \mathbf{B}(x) \rceil$ ocorre na lista numa posição anterior a $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ e M satisfaz $\lceil \forall x(\mathbf{A}(x) \leftrightarrow \mathbf{B}(x)) \rceil$, então atribuímos a $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ a denotação de $\lceil \mathbf{B}(x) \rceil$. Caso contrário atribuímos a $\lceil \mathbf{A}(x) \rceil$ o número $h(m,k)$ tal que todos os números $h(m,x)$ com $x < k$ já foram atribuídos a algum TE.

É fácil ver, seguindo o mesmo raciocínio da demonstração anterior, que M satisfaz (**v-esq**) e é um modelo de $\mathbf{GG}^{\text{Pred}^*}$.

BIBLIOGRAFIA

Textos de Frege:

- "Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene", 1873.
- "Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen", 1874.
- "Siebzehn Kernsätze zur Logik", 1876?. (****)
- *Begriffsschrift*, 1879. (*)
- "Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift", 1881. (****)
- "Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift", 1882.
- *Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884. (**)
- Crítica de *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte* de Cohen, 1885.
- "Über formale Theorien der Arithmetik", 1886.
- *Function und Begriff*, 1891. (*)
- "Über den Begriff der Zahl", 1891-2.
- "Über Begriff und Gegenstand", 1892. (*)
- "Über Sinn und Bedeutung", 1892. (*)
- Crítica ao *Zur Lehre vom Transfiniten* de Cantor, 1892.
- "Ausführungen über Sinn und Bedeutung", 1892-5.
- *Grundgesetze der Arithmetik*. Vol.I, 1893. (***)
- Crítica ao *Philosophie der Arithmetik* de Husserl, 1894. (*)
- Crítica ao *Vorlesungen über die Algebra der Logik* de Schröder, 1895. (*)

- "Logik", 1897. (****)
- *Über die Zahlen des Herrn H.Schubert*, 1899.
- *Grundgesetze der Arithmetik. Vol.II*, 1903. (***)
- "Über die Grundlagen der Geometrie", 1903-1906.
- "Was ist eine Function?", 1904. (*)
- "Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae", 1906.
- "Einleitung in die Logik", 1906.
- "Kurze Übersicht meiner logischen Lehren", 1906. (****)
- "Über Schoenflies", 1906. (****)
- "Was kann ich als Ergebnis meiner Arbeit ansehen?", 1906. (****)
- "Logik in der Mathematik", 1914. (****)
- "Der Gedanke", 1918. (****)
- "Logische Untersuchungen", 1918-1923.
- "Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften", 1924-5. (****)
- "Ein neuer Versuch einer Grundlegung der Arithmetik", 1924-5. (****)

(*) Tradução inglesa em P.Geach e M.Black (ed.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford University Press, 1952.

(**) Tradução portuguesa: *Os Fundamentos da Aritmética*, trad. António Zilhão, INCM, 1992.

(***) Traduzido parcialmente para o Inglês em *The Basic Laws of Arithmetic*, trad. Montgomery Furth, University of California Press, Berkeley e Los Angeles, 1967.

(****) Artigos incluídos em H.Hermes, F.Kambartel, F.Kaulbach (ed.), *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel*, vol I, Felix Meiner, Hamburg, 1969.

Tradução inglesa *Gottlob Frege, Posthumous Writings*, trad. P.Long, R.White, Oxford University Press, 1979.

(*****) Tradução inglesa em P.F.Strawson (ed.), *Philosophical Logic*, Oxford University Press, 1967.

Textos sobre Frege:

Boolos, George

- “Reading the *Begriffsschrift*” (1985) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.
- “Saving Frege from Contradiction” (1986) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.
- “The Consistency of Frege’s *Foundations of Arithmetic*” (1987) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.
- “The Standard of Equality of Numbers” (1990) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.
- “Whence the Contradiction?” (1993) em *Aristotelian Society Supplementary*, vol.67, 1993.
- “Is Hume’s Principle Analytic?” (1997) em Richard Heck (ed.), *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, Oxford University Press, 1998.

Burgess, John

- “On a Consistent Subsystem of Frege’s *Grundgesetze*” (1997) em *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol.39, n2, Primavera de 1998.

Dummett, Michael

- *Frege: Philosophy of Language*, Harvard University Press, 1973.
- *The Interpretation of Frege’s Philosophy*, Harvard University Press, 1981.
- *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1991.
- *Frege and Other Philosophers*, Oxford University Press, 1991.
- «Neo-Fregeans: in Bad Company?» (1998) em Matthias Schirn (ed.) *Philosophy of Mathematics Today*, Oxford University Press, 1998.

Heck, Richard

- «The development of Arithmetic in Frege’s *Grundgesetze der Arithmetik*» (1993) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.
- «The consistency of Predicative Fragments of Frege’s *Grundgesetze der Arithmetik*» (1996) em *History and Philosophy of Logic*, 17, 1996.

Parsons, Terence

- “On the Consistency of the First-order Portion of Frege’s Logical System” (1987) em William Demopoulos (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.

Wehmeier, K. F.

- “Consistent Fragments of *Grundgesetze* and the Existence of Non-Logical Objects”, Synthese, 1999.

Wright, Crispin

- *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press, 1983.
- “On the Philosophical Significance of Frege's Theorem” (1997) em Richard Heck (ed.), *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, Oxford University Press, 1998.
- “On the Harmless Impredicativity of $N^=$ ” (1998) em Matthias Schirn (ed), *Philosophy of Mathematics Today*, Oxford University Press, 1998.
- “Response to Dummett” (1998) em Matthias Schirn (ed), *Philosophy of Mathematics Today*, Oxford University Press, 1998.

Outros Textos:

Cartwright, Richard

- “Speaking of Everything” em *Noûs* 28:1, 1-20, 1994.

Church, Alonzo

- “Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with that of Tarski” (1975) em *The Journal of Symbolic Logic*, vol.41, n4, Dezembro de 1976.

Dedekind, Richard

- *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?* (1887). Tradução inglesa: *Essays on The Theory of Numbers*, trad. Wooster Woodruff Beman, Dover, 1963.

Dummett, Michael

- *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press, 1977.
- *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London, 1978.

Russell, Bertrand

- “Mathematical logic as based on the theory of types” (1908) em Jean van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967.

Compilações:

- **Benacerraf, Paul e Putnam, Hilary** (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1964.
- **Demopoulos, William** (ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.
- **Heck, Richard** (ed.), *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, Oxford University Press, 1998.

– **Schirn, Matthias** (ed.), *Philosophy of Mathematics Today*, Oxford University Press, 1998.

– **Tait, William** (ed.), *Early Analytic Philosophy, Frege, Russell, Wittgenstein*, Open Court, 1997.

– **van Heijenoort, Jean** (ed.), *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967.