LÓGICA E SISTEMAS LÓGICOS

RICARDO SOUSA SILVESTRE
(ricardo@lia.ufc.br)

Universidade Federal do Ceará
Av. Tenente Raimundo Rocha S/N, Cidade Universitária
Juazeiro do Norte-CE, 63000-000

1. O QUE É LÓGICA?

O termo "lógica", e muitos de seus derivados como "lógico", "logicamente" e "ilógico", aparecem em diversas instâncias do nosso discurso quotidiano. Muitas vezes nos perguntamos sobre a lógica de uma determinada afirmação, ou falamos, por exemplo, que é lógico que certo enunciado ou hipótese seja verdade; ou que se certo enunciado A for verdade, logicamente o enunciado B será verdade; ou que é ilógico que acreditemos simultaneamente nos enunciados A e B. Apesar do fato de que o que discutiremos aqui estar, em um sentido muito forte, relacionado com estes usos ordinários da palavra "lógica", reservaremos este termo para nos referirmos a uma determinada disciplina acadêmica, de fundamental importância não só para a filosofia mas também para disciplinas como a computação, a inteligência artificial, a matemática e o direito, que, pode-se dizer, tenta explicar o conceito central subjacente à todas estas construções lingüísticas. E o que seria tal conceito? Para respondermos esta pergunta precisamos primeiro falar um pouco sobre a noção de *argumento*. Abaixo temos alguns exemplos do que entendemos como sendo um argumento.

(1) Todos os homens são mortais;
Sócrates é homem;
Portanto, Sócrates é mortal.

(2) Para possuir título de eleitor é necessário ser maior de 16 anos;
João possui título de eleitor;
Portanto, João é maior de 16 anos.

(3) Até onde a história da civilização nos diz, nunca houve um dia em que o sol não tenha nascido;
Até onde a nossa lembrança nos diz, o sol tem nascido todos os dias;
Portanto, concluímos que amanhã o sol tornará a nascer.

(4) Se uma determinada entidade é empiricamente percebida por todos, ou quase todos os membros de uma comunidade, então essa entidade existe;
Na história da humanidade, apenas um número extremamente reduzido de pessoas proclamou ter percebido empiricamente a entidade a qual chamamos de Deus;
Não é verdade então que Deus tenha sido empiricamente percebido por todos, ou quase todos os membros das mais diversas comunidades existentes na história da humanidade;
Portanto, Deus não existe.

Trabalho parcialmente financiado pelo CNPq (Edital Universal 2007) e pela FUNCAP (edital BPI 2008) e Governo do Estado do Ceará.

Podemos dizer que um argumento é basicamente um par composto por um conjunto de enunciados, aos quais damos o nome de *premissas*, e outro enunciado, chamado *conclusão*. Nos casos acima, o último enunciado, iniciado sempre pela expressão "Portanto," seria a conclusão, e os demais enunciados vindos antes dele seriam as premissas. Mas para chamarmos um determinado conjunto de premissas e uma certa conclusão de argumento, as premissas e a conclusão devem estar relacionados de tal forma que a verdade das premissas de alguma forma *implique logicamente* ou acarrete a verdade da conclusão. Ou falando de outra forma, a verdade da conclusão deve *seguir* da verdade das premissas, ou ainda a conclusão deve poder ser *derivada*, *provada* ou *deduzida* a partir das premissas. Utilizando a noção de crença, poderíamos dizer que se uma pessoa acredita na verdade das premissas de um argumento, então, dado a relação que há entre premissas e conclusão, ela será forçada, de um ponto de vista lógico, a também acreditar na verdade da conclusão.

Dada essa breve exposição, devemos então supor que as premissas de cada um dos argumentos acima implicam logicamente suas respectivas conclusões. Mas será que isso é o caso para todos os três argumentos? Tentemos avaliar intuitivamente esses argumentos para ver se em todos eles a verdade da conclusão segue logicamente da verdade das premissas. O primeiro argumento parece não representar nenhum tipo de problema: se é verdade que todos os homens são mortais e que Sócrates é homem, então obviamente também é verdade que Sócrates é mortal. Ou falando de outra forma, é impossível neste caso que as premissas sejam verdadeiras, mas a conclusão não. O mesmo parece acontecer com o segundo argumento: se é verdade que para possuir título de eleitor é necessário ser maior de 16 anos, e João possui título de eleitor, então também deve ser verdade que João é maior de 16 anos.

Já o terceiro argumento, apesar de bastante razoável, não parece ter a mesma força dos dois primeiros. Apesar de sabermos que suas premissas são verdadeiras, não parece em absoluto absurdo imaginar que amanhã o sol não nascerá. Em outras palavras, apesar de bastante razoável, neste terceiro argumento a verdade das premissas não garante de forma total ou implica *necessariamente* a verdade da conclusão. Apesar de podermos dizer neste caso que é provável que o Sol nascerá amanhã, não podemos, dado simplesmente a verdade das premissas, afirmar que é *certo* que isso acontecerá.

Em relação ao quarto argumento, apesar de a primeira vista parecer correto, o que ocorre é exatamente o oposto. Para vermos isso basta atentarmos para o fato de o que a verdade da primeira premissa nos garante é que *se* uma determinada entidade é empiricamente percebida por todos, ou quase todos os membros de uma comunidade, *então* essa entidade existe. Nada em absoluto é dito a respeito da situação onde uma entidade não tenha sido empiricamente percebida por todos, ou quase todos os membros das mais diversas comunidades existentes na história da humanidade. E isso é exatamente o que é dito na segunda premissa, que não é verdade então que Deus tenha sido empiricamente percebido por todos, ou quase todos os membros das mais diversas comunidades existentes na história da humanidade. Conseqüentemente, dado apenas a verdade das premissas, não podemos de forma alguma concluir que Deus não existe.

Temos aqui então argumentos onde a verdade das premissas não implica a verdade da conclusão, ou a implica de uma forma não necessária. Isso nos força a refinar a nossa definição inicial de argumento, bem como tentar encontrar uma taxonomia de argumentos na qual os exemplos acima se enquadrem. Primeiro vamos dizer que um argumento é um par composto por um conjunto de enunciados, as premissas, e outro enunciado, chamado conclusão, onde *pretensamente* há uma relação inferencial entre dois termos. Por *relação inferencial* entendemos exatamente aquilo que, em um argumento, nos permite concluir, derivar ou inferir a conclusão a partir das premissas. Em função disso, de agora em diante também chamaremos argumentos de *inferências*. Segundo, de posse desta nova definição, podemos classificar os quatro argumentos acima de acordo com a *validade* da suposta relação de inferência presente em cada um deles.

Chamaremos argumentos como (1) e (2), onde há indubitavelmente uma relação de inferência entre premissas e conclusões de *argumentos válidos* ou *corretos*. A argumentos como (4), onde é patente que a conclusão não pode efetivamente ser inferida a partir das conclusões, damos o nome de *argumentos inválidos* ou *incorretos*. Apesar de o termo *falácia* também ser usado para designar argumentos inválidos, tal termo seria mais apropriadamente usado para se referir exclusivamente àqueles argumentos inválidos que, a primeira vista, poderiam ser tomados por argumentos válidos (Neste caso (4) muito provavelmente seria classificado como uma falácia.)

Os argumentos válidos são tradicionalmente divididos em argumentos *dedutivos* e argumentos *indutivos*. Argumentos (1) e (2) são exemplos de argumentos dedutivos, casos nos quais a verdade das premissas implica *necessariamente* a verdade da conclusão, ou equivalentemente, é impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Dizemos neste caso que a relação de inferência existente entre premissas e conclusão é uma *relação de dedução*. Argumentos indutivos, exemplificados pelo argumento (3), são aqueles argumentos cuja verdade das premissas não implica necessariamente a verdade da conclusão; em um argumento indutivo pode acontecer de as premissas serem verdadeiras e a conclusão falsa. No entanto, diferentemente das falácias, reconhecemos nos argumentos indutivos algum tipo de racionalidade ou retitude lógica. Podemos por exemplo dizer que, apesar de as premissas de (3) não nos permitirem concluir com certeza sua conclusão, elas nos permitem concluir que é *provável*, plausível ou razoável concluir que amanhã o sol tornará a nascer.

Em um sentido *lato*, a lógica pode ser entendida como o estudo dos argumentos válidos, sejam eles dedutivos ou indutivos. Em um sentido mais estrito, no entanto, sentido este que usaremos neste texto, a lógica se dedica ao estudo dos argumentos dedutivos. Tal uso mais restrito do termo "lógica" é de certa forma corroborado tanto pela existência de um termo específico – lógica indutiva – para designar o estudo dos argumentos indutivos, como pelo fato de que, enquanto a lógica, entendida como o estudo dos argumentos válidos dedutivos, consiste (em boa parte) em um corpo de conhecimento consolidado e relativamente bem definido, a lógica indutiva ainda é uma área de pesquisa que não conseguiu gerar muito consenso. Adicione-se ainda o fato de que, enquanto área de pesquisa, a lógica indutiva perdeu muito do fôlego que detinha há, por exemplo, 40 anos.

Dado tudo isso, podemos dizer então que o conceito central subjacente às expressões que usamos para iniciar esta seção, e que é o objeto central da lógica, é a noção de *relação de dedução*, ou seja, aquela relação que um conjunto de enunciados pode ter com um enunciado que faz com que este último possa ser concluído, inferido ou deduzido a partir do primeiro. Também se costuma usar o termo "*relação de conseqüência lógica*" para referenciar tal relação. Assim, lógica para nós significará daqui em diante a disciplina que está primordialmente preocupada com o estudo dos argumentos ou inferências (dedutivas) válidas. Mais na frente veremos, no entanto, que na prossecução deste objetivo chega-se a outro aspecto da lógica que, apesar de sempre poder ser visto como uma mera conseqüência deste objetivo maior de explicar a noção de conseqüência lógica, consiste de fato em um segundo componente daquilo que podemos chamar de o escopo da lógica.

De qualquer forma, se tomarmos lógica como sendo o estudo das inferências válidas, ou seja, como uma *teoria da inferência*, podemos sempre nos perguntar como esse estudo se dá. Considere os seguintes argumentos:

(5) Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal;
Sócrates é homem;
Portanto, Sócrates é mortal.

(6) Se João possui título de eleitor, então João é maior de 16 anos;
João possui título de eleitor;
Portanto, João é maior de 16 anos.

O que esses dois argumentos têm em comum? Primeiro de tudo, há realmente algo em comum entre estes dois argumentos? Enquanto um se refere a uma propriedade dos seres humanos instanciada por um ser humano particular, Sócrates, o outro fala de algo completamente diferente, a saber, a conseqüência óbvia de uma peculiaridade do sistema eleitoral brasileiro quando aplicada a João. A despeito, porém, desta diferença de conteúdo, os argumentos (5) e (6) parecem compartilhar algo que poderíamos chamar de a estrutura ou *forma lógica* do argumento. Se realizássemos o exercício de extrair de (5) e (6) qualquer menção sobre os tópicos específicos tratados nestes argumentos, teríamos como resultado algo como o que segue:

(7) Se *isto*, então *aquilo*;
Isto;
Portanto, *aquilo*.

Ou, chamando *isto* de A e *aquilo* de B,

(7’) Se A, então B;
A;
Portanto, B.

Aqui, obviamente, A e B (ou *isto* e *aquilo*) não designam qualquer sentença em particular, mas apenas os *lugares* dentro de um argumento específico que as sentenças que o compõe devem ocupar para que tal argumento tenha a forma acima ilustrada. Não temos aqui então um argumento como os que temos visto até agora, mas sim um *esquema de argumento*. Se substituirmos, por exemplo, A por “Sócrates é homem” e B por “Sócrates é mortal” obtemos o argumento (5); se substituímos A por “João possui título de eleitor” e B por “João é maior de 16 anos” obtemos (6). Dizemos então que (7’) representa a forma dos argumentos (5) e (6), ou equivalentemente, que (5) e (6) são *instâncias* do esquema de inferência representado por (7’).

O importante para nós nisso tudo é que é exatamente pelo fato de possuírem a forma lógica representada em (7’) que podemos afirmar que os argumentos (5) e (6) são válidos. Não é, por exemplo, por tratar das regras do sistema eleitoral brasileiro que afirmamos que (6) é um argumento válido, mas sim pela maneira como esta informação aparece no argumento em relação às outras informações e à construção “se ... então”. Ou, falando de outra forma, o que *caracteriza* (6), e conseqüentemente (5), como sendo um argumento válido é exclusivamente a sua forma, ou sendo mais específico, o fato de ser ele uma instância de (7’). O conteúdo de um argumento, ou o tópico do qual ele trata, é completamente irrelevante para a sua validade. A conseqüência óbvia disso é que se a lógica tem a pretensão de estudar os argumentos válidos, ela tem que se concentrar na forma, e não no conteúdo, dos argumentos. Em outras palavras, é estudando a forma dos argumentos que conseguiremos identificar sua validade. (É nesse sentido que muitas vezes usamos a expressão “lógica formal”.)

O leitor atento deve ter notado certa similaridade entre os argumentos (1) e (5) e (2) e (6). Considere (1) e (5) primeiramente:

(1) Todos os homens são mortais;
Sócrates é homem;
Portanto, Sócrates é mortal.

(5) Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal;

Sócrates é homem;
Portanto, Sócrates é mortal.

Aqui, com exceção da primeira premissa, os enunciados dos dois argumentos são idênticos. Mas mesmo com respeito à primeira premissa, há sem dúvida uma relação muito íntima entre os dois enunciados: podemos facilmente concluir a primeira premissa de (5) a partir da primeira premissa de (1). Em outras palavras, o argumento abaixo é válido:

(8) Todos os homens são mortais;
Portanto, se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.

Mas veja que as formas destes dois enunciados são bastante diferentes: enquanto que um tem a forma "Todo A é B", o outro tem a forma "Se A então B". De que maneira então devem estes enunciados ser escritos de maneira a deixar explícita a relação inferencial que há entre eles? Bom, trivialmente enquanto um fala de algo referente a todos os homens, o outro parece falar a *mesma coisa*, mas sobre um homem específico. Ou, em outras palavras, ambos os enunciados falam a mesma coisa, mas sobre perspectivas diferentes, um de uma perspectiva universal e outro de uma perspectiva particular. Assim, o que deve haver de diferente na forma desses dois enunciados deve estar relacionado com essa diferença de perspectiva, de forma que podemos reescrever (8) como segue:

(8') Para toda entidade, *se esta entidade é homem, então ela é mortal*;
Portanto, *se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal*.

Ou de forma ainda mais explícita no que se refere à sua forma lógica:

(9) Para todo x, se x é Z, então x é Y;
Portanto, se w é Y, então w é Y.

Podemos, portanto, reescrever (1) como segue:

(1') Para toda entidade, se esta entidade é homem, então ela é mortal;
Sócrates é homem;
Portanto, Sócrates é mortal,

sendo o esquema de argumento abaixo a representação de sua forma lógica:

(10) Para todo x, se x é Z, então x é Y;
w é Z;
Portanto, w é Y.

Utilizando raciocínio similar, podemos reescrever (2) como segue:

(2') Para toda entidade, se esta entidade é tal que ela possui título de eleitor, então ela é maior de 16 anos;
João é tal que ele possui título de eleitor;
Portanto, João é maior de 16 anos.

(Para vermos que "Para toda entidade, se esta entidade é tal que ela possui título de eleitor, então ela é maior de 16 anos" significa o mesmo que "Para possuir título de eleitor é necessário ser maior de 16 anos", basta vermos que se uma pessoa qualquer possui título de eleitor, então com certeza ela será maior de 16 anos, pois de outra forma ela não teria conseguido obtê-lo.)

Sobre a forma lógica de (2’), trivialmente ela corresponde a (10): substitua Z por “é tal que possui título de eleitor”, Y por “é maior de 16 anos” e *w* por “João” e você obterá (2’). Temos então que (1) e (2) possuem a mesma forma lógica.

O importante para nós aqui é que, no que se refere à primeira premissa dos argumentos (1) e (2), sua forma lógica difere consideravelmente do que podemos chamar de sua *forma gramatical*. Enquanto em (1) a primeira premissa é da forma “Todo A é B”, em (1’) ela já tem a forma “Para todo *x*, se *x* é Z, então *x* é Y”, e enquanto em (2) a primeira premissa tem a forma “Para A é necessário B”, em (2’) ela também tem a forma “Para todo *x*, se *x* é Z, então *x* é Y”. E é óbvio que nesta forma tais enunciados revelam de forma muito mais clara as relações inferenciais que eles têm com os outros enunciados dos argumentos aos quais pertencem, bem como as relações que porventura existam entre seus argumentos e outros argumentos (como é o caso de (1) e (5) e (2) e (6)). Assim temos o fato bastante importante para o estudo dos argumentos válidos de que a forma gramatical dos enunciados nem sempre revela sua forma lógica.

Se quiséssemos definir de uma maneira mais precisa o conceito de forma lógica diríamos que a *forma lógica* de um argumento ou enunciado é a estrutura subjacente ao argumento ou enunciado em virtude da qual ele possui suas propriedades inferenciais. Trivialmente, a forma lógica de um argumento dedutivo se reduz às formas lógicas dos enunciados que o compõe (feita obviamente a devida demarcação do que é premissas e o que é conclusão).

Não é difícil então, dado tudo isso, avaliar a importância da noção de forma lógica para o estudo das inferências válidas, bem como a importância de se estudar métodos de *representação* de enunciados que deixem evidente esta forma lógica. Na verdade isso é mais ou menos trivial. Se a lógica se dedica a estudar as inferências válidas, e isso é feito através da explicitação da forma ou estrutura das inferências, é natural que parte fundamental deste projeto seja o de encontrar maneiras adequadas de representação que tornem o mais explícito possível a estrutura lógico-inferencial dos enunciados. Assim, a maneira através da qual representamos os enunciados, ou em outras palavras, a linguagem que usamos na representação dos nossos argumentos desempenha um papel fundamental no estudo dos argumentos válidos.

Com isso chegamos ao outro grande aspecto da lógica: seu *aspecto representacional*. Podemos dizer que a lógica possui na verdade dois aspectos fundamentais que juntos definem seu escopo: um aspecto inferencial e um aspecto representacional. Em outras palavras, enquanto vista como uma *teoria da inferência* a lógica se preocupa primordialmente com o estudo as inferências válidas, enquanto *teoria da representação* ela se dedica ao estudo de maneiras adequadas do ponto de vista lógico-formal de representar enunciados. Veja, no entanto, que estes dois aspectos estão intimamente relacionados. Conforme já mencionamos, se nosso objetivo é estudar as inferências válidas, teremos que dispor de alguma maneira, condizente com esse objetivo, de representar os componentes básicos dos argumentos que são os enunciados. Por outro lado, se nossa preocupação primordial é com a representação dos enunciados, nos depararemos inevitavelmente com construções lingüísticas de caráter eminentemente lógico-inferencial e conseqüentemente com a possibilidade de tornar explícitas as relações inferenciais que existem entre enunciados. A exigência de se considerar tais relações aparece em diversas instâncias de uso da lógica como teoria da representação, como, por exemplo, em Inteligência Artificial, onde se exige para a construção de agentes artificiais não apenas a representação de situações, eventos, ações e leis causais, mas também o conhecimento das conseqüências da realização do evento *e* ou ação *a*, por exemplo, na situação *s*. De um ponto de vista determinístico, tais conseqüências podem muito convenientemente ser tomadas como correspondendo a certa subclasse de todos os enunciados logicamente implicados pelos enunciados representando o evento *e* (ou ação *a*), a situação *s* e as leis causais.

Na próxima seção falaremos mais sobre este duplo aspecto da lógica e como ele se manifesta dentro do que chamaremos de sistemas lógicos. Indicaremos aqui, no entanto, de forma muito breve, porém com certo nível de detalhe, em que consistem estas duas tarefas da lógica.

Considere a seguinte versão modificada do argumento (2):

(11) Para possuir título de eleitor é necessário ter nascido no Brasil ou ser naturalizado brasileiro bem como ser maior de 16 anos,
João possui título de eleitor e não nasceu no Brasil;
Portanto, João é naturalizado brasileiro e maior de 16 anos.

A primeira premissa deste argumento pode ser reescrita como segue:

(11') Para toda entidade, se esta entidade é tal que ela possui título de eleitor, então ela é um nativo brasileiro ou naturalizado brasileiro e maior de 16 anos.

Trivialmente, então, temos uma versão mais simples de (11) onde (11') é levada em conta:

(12) Se João possui título de eleitor, então ele é um nativo brasileiro ou naturalizado brasileiro e maior de 16 anos,
João possui título de eleitor e não nasceu no Brasil;
Portanto, João é naturalizado brasileiro e maior de 16 anos.

Neste caso, a forma lógica de (12) seria como segue:

(13) Se A, então (B ou C) e D;
A e não B;
Portanto, C e D.

Diferentemente dos argumentos analisadas por nós até agora, não nos parece neste caso tão imediato porque a conclusão segue das premissas. Tentemos então explicitar os passos que nos levariam, neste argumento, das premissas à conclusão. Primeiro de tudo, como é dito na segunda premissa que A, podemos concluir, usando a primeira premissa, que (B ou C) e que D. Mas veja que também na segunda premissa é dito que não B. Assim, como temos que B ou C, obviamente teremos C. Juntando estas duas conclusões temos C e D. Estes passos podem descritos de uma forma mais detalhada como segue:

1.	Se A, então (B ou C) e D	1° premissa
2.	A e não B	2° premissa
3.	A	Segue de 2
4.	(B ou C) e D	Segue de 1 e 3
5.	D	Segue de 4
6.	(B ou C)	Segue de 4
7.	não B	Segue de 2
8.	C	Segue de 6 e 7
9.	D e C	Segue de 5 e 8

Aqui a segunda coluna contém os passos inferenciais intermediários que precisamos obter para chegarmos à conclusão do argumento, representada no passo 9, e a terceira coluna contém a justificativa do respectivo passo.

Esta seria uma das tarefas da lógica enquanto teoria da inferência: tornar o mais explícito possível a estrutura inferencial de um argumento. Mas veja que nesta e nas outras tentativas que fizemos de tornar explícita a forma lógica dos enunciados há algumas construções lingüísticas que, além de aparecerem com relativa freqüência na estrutura dos argumentos válidos, parecem desempenhar um papel fundamental na validade dos mesmos. No nosso caso acima, só podemos, por exemplo, concluir 3 a partir de 2 por conta do que entendemos como sendo um aspecto lógico fundamental da expressão "e"; 4 só seque de 1 e 3 devido à existência da expressão "se ... então ..." em 2; e só podemos concluir 8 a partir de 6 e 7 por conta do conectivo "ou" contido em 6 e da expressão "não" presente em 7. O que isso mostra é que são construções lingüísticas deste tipo o que conferem as propriedades lógicas de um enunciado ou argumento. Na verdade, são elas que em grande parte determinam o que estamos chamando de a forma lógica de um enunciado. Assim, nada mais natural do que a lógica dar uma atenção especial a tais construções. Primeiro de tudo, talvez seja bem mais conveniente, na representação dos enunciados e argumentos, usar símbolos especiais para designar tais construções: a construção "se ... então ..." poderia, por exemplo, ser representada pelo símbolo $\rightarrow$, "e" por $\wedge$, "ou" por $\vee$, "não" por $\neg$. A tais símbolos nós damos o nome de *conectivos lógicos*. Procedendo assim, poderíamos reescrever os passos acima como segue:

1.	$A \rightarrow ((B \vee C) \wedge D)$	1° premissa
2.	$A \wedge \neg B$	2° premissa
3.	A	Segue de 2
4.	$(B \vee C) \wedge D$	Segue de 1 e 3
5.	D	Segue de 4
6.	$B \vee C$	Segue de 4
7.	$\neg B$	Segue de 2
8.	C	Segue de 6 e 7
9.	$C \wedge D$	Segue de 5 e 8

Tentemos agora analisar o argumento (11) considerando a forma lógica de sua primeira premissa conforme descrito em (11'). Segue abaixo a forma lógica de (11):

(14) Para todo *x*, se *x* é Z, então (*x* é R ou *x* é S) e *x* é Y;
a é Z e *a* não é R;
a é S e *a* é Y.

Veja que, diferentemente de (13), devido à existência de uma quantificação universal (para todo *x*), nós temos que fazer referência, na forma lógica, a propriedades de objetos (no caso a propriedade de possuir título de eleitor, de ser nativo brasileiro, etc.) e aos objetos que possuem tais propriedades. Também devido à quantificação universal, a análise dos passos inferenciais de (14) que vão das premissas à conclusão terá uma etapa a mais, a que nos permite ir do discurso universal contido na primeira premissa ao discurso particular necessário à conclusão. De uma forma mais específica, os passos inferenciais deste argumento podem ser descritos como segue. Como para todo *x*, se *x* é Z, então (*x* é R ou *x* é S) e *x* é Y, então, se *a* é Z, (*a* é R ou *a* é S) e *a* é Y. Mas como é dito na segunda premissa que *a* é Z, concluímos que (*a* é R ou *a* é S) e que *a* é Y. Mas veja que também na segunda premissa é dito que *a* não é R. Assim, como *a* é R ou *a* é S, podemos concluir que *a* é S. Juntando estas duas conclusões podemos então dizer que *a* é S e *a* é Y. Estes passos podem descritos de uma forma mais detalhada como segue:

1.	Para todo *x*, se *x* é Z, então (*x* é R ou *x* é S) e *x* é Y	1° premissa
2.	Se *a* é Z, então (*a* é R ou *a* é S) e *a* é Y	Segue de 1
3.	*a* é Z e *a* não é R	2° premissa
4.	*a* é Z	Segue de 3
5.	(*a* é R ou *a* é S) e *a* é Y	Segue de 2 e 4
6.	*a* é Y	Segue de 5
7.	(*a* é R ou *a* é S)	Segue de 5

8.	*a* não é R	Segue de 3
9.	*a* é S	Segue de 7 e 8
10.	*a* é S e *a* é Y	Segue de 6 e 9

Fazendo o mesmo exercício que fizemos com (13), vemos aqui algumas que construções lingüísticas desempenham papel fundamental na justificativa dos passos acima. Em adição ao que dissemos sobre "e", "se ... então ...", "ou" e "não", temos que 2 só segue de 1 por conta da expressão "para todo *x*" que aparece em 1. Assim, supondo que representemos "para todo *x*" por $\forall x$, e expressões como "*a* é Z" por Z*a*, teríamos os passos acima reescritos como segue:

1.	$\forall x(Zx \rightarrow ((Rx \vee Sx) \wedge Yx))$	1° premissa
2.	$Za \rightarrow ((Ra \vee Sa) \wedge Ya)$	Segue de 1
3.	$Za \wedge \neg Ra$	2° premissa
4.	Za	Segue de 3
5.	$(Ra \vee Sa) \wedge Ya$	Segue de 2 e 4
6.	Ya	Segue de 5
7.	$Ra \vee Sa$	Segue de 5
8.	$\neg Ra$	Segue de 3
9.	Sa	Segue de 7 e 8
10.	$Sa \wedge Ya$	Segue de 6 e 9

Veja que, nestes exemplos, a forma lógica dos enunciados, bem como o papel desta forma nos passos inferenciais que nos levam de um enunciado a outro está muito mais claro. A linguagens deste tipo, capazes de representar adequadamente a forma lógica dos diversos tipos de enunciados, nós damos o nome de linguagens lógico-formais, ou simplesmente linguagens lógicas, sendo sua elaboração uma das principais das tarefas da lógica enquanto teoria da representação.

2. *LÓGICA E SISTEMAS LÓGICOS*

Comumente consideram-se dois aspectos somo sendo fundamentais para a caracterização de uma disciplina: o escopo, objetivo ou objeto o qual esta disciplina pretende estudar, e a maneira ou método através do qual ela visa atingir tal objetivo. Vimos que a lógica enquanto disciplina possui dois objetivos básicos: o de estudar as inferências válidas e o de prover maneiras adequadas de representar enunciados. Assim a lógica pode ser vista como uma teoria da inferência ou como uma teoria da representação. Mas qual seria então o método, por assim dizer, através do qual a lógica tenciona atingir tais objetivos?

Para respondermos esta pergunta temos que falar sobre um aspecto bastante peculiar da lógica contemporânea: a sua estreita relação com a matemática, a tal ponto de a disciplina que hoje chamamos de lógica ser, em um sentido muito forte, equivalente ao que se convencionou chamar de *lógica matemática*. Primeiro de tudo deve-se mencionar que muito da motivação para o surgimento do que chamamos de lógica moderna foi o desejo, por parte de alguns filósofos e matemáticos, de melhor compreender o raciocínio por trás da argumentação matemática. É neste sentido então que a expressão "lógica matemática" pode ser vista como significando a lógica *da* matemática.

Tal visão, no entanto, reflete apenas um aspecto das coisas, e na verdade pode ser enganadora, visto que, como vimos, o objetivo da lógica em geral e da lógica moderna em particular é o estudo das inferências em um sentido *lato*, não se restringindo a nenhum tipo particular de argumento. Outra maneira de ler a expressão "lógica matemática", que neste caso sim, não só reflete com exatidão a disciplina a qual ela tenta dar nome, mas também releva um aspecto essencial sobre ela, é entendendo-a como o *estudo matemático* *da lógica*, ou em outras palavras, o estudo dos argumentos válidos e de maneiras adequadas de representar enunciados utilizando-se do que podemos chamar de *método matemático*. Ou dizendo de outra forma, seria a tentativa de desenvolver uma teoria da inferência e da representação utilizando metodologia semelhante à usada pelos matemáticos no desenvolvimento de suas teorias. Isso se dá, grosso modo, através do desenvolvimento de sistemas matemático-formais, não por acaso chamados de *sistemas lógicos*. Se tomarmos a lógica enquanto teoria da inferência, a análise ou tentativa de identificar a classe dos argumentos válidos tomará, como um todo, a forma de um sistema matemático, de modo que a resposta à pergunta "quando um argumento é válido?" será algo como que um subproduto inevitável do sistema lógico.

Apesar de que uma compreensão satisfatória do que estamos chamando de o método da lógica somente poder ser obtida através de um estudo pormenorizado dos sistemas lógicos, tentaremos aqui dar uma idéia básica de o que são tais sistemas e como eles tentam atingir o objetivo da lógica de identificar a classe de argumentos válidos. Comecemos lembrando que validade em um argumento é basicamente uma *relação lógica* entre um conjunto de enunciados (as premissas) e um enunciado (a conclusão). Em matemática, relações são entidades passíveis de serem construídas e analisadas matematicamente. Um exemplo é a relação "maior que", geralmente representada pelo símbolo >. Primeiramente, essa relação vale entre duas entidades do mesmo tipo, a saber, números. Temos assim que o número 12 se relaciona com o número 7 de acordo a relação "maior que", caso este representado por $12>7$. Diferentemente de >, a relação de pertença vale entre entidades de tipos diferentes, no caso um objeto e um conjunto desses objetos. Temos assim que o objeto 1 pertence ao conjunto de números naturais, em símbolos $1\in \mathbb{N}$. Já o número 0.5 não se relaciona com $\mathbb{N}$ de acordo com a relação de pertença.

Três pontos valem a pena serem mencionados aqui sobre relações matemáticas. Primeiro, para realmente sabermos de que relação nós estamos falando, temos que fixar os dois conjuntos cujos elementos vão ou não se relacionar de acordo com a relação em questão. Por exemplo, para falarmos de uma relação "maior que", temos que dizer a que conjunto de entidades essa relação vai ser 'aplicada', se ao conjunto de números naturais, inteiros, racionais, etc. De um ponto de vista estritamente rigoroso, a relação > que relaciona elementos do conjunto dos números naturais é diferente da relação > que relaciona elementos do conjunto dos números inteiros, apesar de o símbolo que usamos para as duas relações ser o mesmo. No caso da primeira dizemos que > é uma relação do tipo $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ (o que representamos também por $>: \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N}$), ou seja, uma relação que 'une' ou associa dois elementos do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, e no caso da segunda relação, dizemos que > é do tipo $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$, ou seja, uma relação que associa dois elementos pertencentes ao conjunto dos números inteiros.

O segundo ponto, que apesar de por demais óbvio vale a pena ser mencionado, é que dada uma relação matemática qualquer $R: \Delta \text{ x } \Gamma$ e dois elementos $\alpha\in\Delta$ e $\beta\in\Gamma$, R nos dirá se α se relaciona ou não com β de acordo com R. Por exemplo, dada a relação "maior que" aplicada aos naturais, $>: \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N}$ e dois números $x,y\in\mathbb{N}$, > nos diz se x é ou não maior que y. Em outras palavras, > é capaz de nos dizer, para todo e qualquer par de números x, y pertencentes ao conjunto dos naturais, se x é ou não maior que y.

O terceiro ponto é que uma relação matemática geralmente possui propriedades formais de fundamental importância para a sua diferenciação enquanto relação. Por exemplo, a relação $>: \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N}$ é tal que, dados $x,y,z\in\mathbb{N}$, se $x>y$ e $y>z$, então $x>z$. Se uma relação R é tal que se aRb e bRc então aRc, onde aRb é uma abreviação para "o objeto *a* se relaciona com o objeto *b* de acordo com a relação R", nós dizemos que esta relação é *transitiva*. Assim, > é transitiva. Outras propriedades interessantes são a *reflexividade* e a *simetria*: uma relação é reflexiva se e somente se aRa para todo *a*, e simétrica se e somente se se aRb então bRa. Enquanto, no entanto, > é transitiva, ela não é nem reflexiva nem simétrica: não é o caso que para todo número x, x>x, nem que para todo número x e y, se x>y então y>x. Já a relação de igualdade definida para os naturais (= : $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$), por exemplo, é reflexiva, simétrica e transitiva: a=a para todo a$\in\mathbb{N}$, para todo a,b$\in\mathbb{N}$, se a=b então b=a, e para todo a,b,c$\in\mathbb{N}$, se a=b e b=c então a=c.

Mas o que é que isso tudo tem a ver com lógica? Talvez muito, já que, como dissemos, um argumento é válido em virtude da *relação* inferencial, chamada por nós de relação de dedução ou relação de conseqüência lógica, que há entre premissas e conclusões. Suponha então que, à semelhança do que é feito em matemática, usemos um símbolo especial para referenciarmos tal relação, digamos o símbolo "$\vdash$". Invocando o primeiro ponto acima, para caracterizarmos precisamente $\vdash$ precisamos identificar os tipos de elementos que se relacionarão através de $\vdash$, ou equivalentemente, os dois conjuntos aos quais tais elementos pertencem. Essa não parece ser uma tarefa das mais difíceis, visto que, como sabemos, a relação de dedução associa ou relaciona um conjunto de enunciados (que chamamos de premissas) de um lado, com um enunciado (a conclusão) do outro. Mas enunciados são entidades lingüísticas, que em certo sentido podem ser vistas como pertencentes a línguas específicas. Assim, para falarmos sobre os dois conjuntos aos quais os elementos que $\vdash$ relacionará pertencem, teremos que falar sobre a língua, ou, adotando a nomenclatura padrão em lógica, a *linguagem* a qual os enunciados em questão pertencem.

Se chamarmos essa linguagem de L, teremos que a nossa relação $\vdash$ será definida como associando duas entidades, a saber, conjuntos de enunciados pertencentes a L e enunciados também pertencentes a L. Para bem compreendermos esse tipo de definição, no entanto, temos que ver a linguagem L como sendo nada mais do que um conjunto, na verdade um conjunto enorme, contendo todos os enunciados que podem ser construídos naquela linguagem. Por exemplo, se quiséssemos caracterizar a língua portuguesa dessa maneira, diríamos que a língua, ou a linguagem portuguesa, é o conjunto de todas as sentenças, significavas neste caso, que podem ser escritas em português. Como então $\vdash$ associa conjuntos de enunciados pertencentes a L e enunciados também pertencentes a L, temos então que podemos escrever coisas como $\Gamma \vdash \alpha$, onde Γ é um conjunto de enunciados pertencentes a L, ou em outras palavras, um subconjunto de L (em símbolos: $\Gamma\subseteq$L) e α é um enunciado pertencente a L (em símbolos: $\alpha\in$L). Como Γ é um subconjunto de L, também podemos dizer que Γ pertence ao *conjunto de todos os subconjuntos* de L, comumente chamado de conjunto das partes de L, que aqui representaremos por $\Re$(L). Assim, dada uma linguagem L qualquer, podemos dizer que $\vdash$ é da forma : $\Re$(L) x L, ou seja, um relação que associa elementos de $\Re$(L), ou seja, subconjuntos de L, que são obviamente conjuntos de enunciados, e elementos de L, ou seja, enunciados.

Segundo, dado uma linguagem L específica e a relação de dedução aplicada à L, e dados um enunciado qualquer $\alpha\in$L e um conjunto de enunciados $\Gamma\subseteq$L, através de $\vdash$ saberemos se α é deduzido ou não a partir de A. Tomando os elementos de Γ como sendo as *premissas* e α como sendo a *conclusão*, $\vdash$ nos dirá se o argumento <Γ, α> é ou não um argumento válido. Em caso positivo escrevemos $\Gamma \vdash \alpha$; em caso negativo $\Gamma \nvdash \alpha$. Ou em outras palavras, $\Gamma \vdash \alpha$ é nada mais do uma representação do fato de que o argumento composto pelas premissas Γ e conclusão α é válido. Esse ponto deve ser bem compreendido, pois ele contém na verdade o propósito da lógica enquanto teoria da inferência. Se dispomos de uma relação $\vdash$ do tipo $\Re$(L) x L e se dizemos que ela caracteriza a relação de validade dedutiva de forma que $\Gamma \vdash \alpha$ significa que α pode ser deduzido a partir de Γ, ou que o par <Γ,α> é um argumento válido, então o nosso trabalho estará terminado. Já teremos em mãos uma caracterização da classe de argumentos válidos, pelo menos, dos argumentos válidos que podem ser construídos usando uma linguagem específica, a saber, L.

Terceiro, enquanto relação matemática, $\vdash$ deve possuir propriedades formais através das quais podemos entender melhor as características disso que estamos chamando de conseqüência lógica. Por exemplo, se $\alpha\in\Gamma$, então $\Gamma \vdash \alpha$, ou seja, se a conclusão de um argumento aparece entre suas premissas, tal argumento será trivialmente válido. A esta propriedade nós damos o nome de a *reflexividade* de $\vdash$. $\vdash$ também possui um tipo de *transitividade*: se $\Gamma \vdash \beta$ e $\{\beta\} \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, se β é concluído a partir de Γ e φ é concluído a partir de β, então φ deve poder ser concluído a partir de Γ. Também temos que se $\Gamma \vdash \alpha$, então para toda fórmula $\beta \in L$, $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$. Isso significa que se α é uma conclusão do conjunto de premissas Γ, ela continuará sendo mesmo se adicionarmos mais premissas a Γ (que é o que é feito quando consideramos o conjunto $\Gamma \cup \{\beta\}$). A esta propriedade damos o nome de *monotonicidade*.

Existem também propriedades que correlacionam $\vdash$ com conectivos lógicos específicos. Por exemplo, temos que se $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$ então $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$, sendo o inverso também válido: se $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$ então $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$. A tal propriedade damos o nome de *teorema da dedução*. Eis outro exemplo: $\Gamma \vdash \alpha \vee \neg\alpha$. Isso significa que para todo e qualquer enunciado $\alpha \in L$, $\alpha \vee \neg\alpha$ pode ser deduzido a partir de qualquer conjunto $\Gamma \subseteq L$, ou falando de outra forma, que $\alpha \vee \neg\alpha$ é um princípio lógico válido universalmente. Tal princípio, que chamamos de *princípio do terceiro excluído*, significa basicamente que, para todo enunciado $\alpha \in L$, α é verdade ou sua negação é verdade. Um exemplo semelhante é o seguinte: $\Gamma \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, que é nada mais do que a validade do que chamamos de *princípio da não contradição* (para todo enunciado α, não pode ser o caso que tanto α como sua negação são verdade) sendo estabelecida em termos de relação de dedução. Temos também que métodos clássicos de argumentação podem ser representados através de propriedades de $\vdash$, como é o caso da chamada *redução ao absurdo*: se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$, então $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Isso significa que se, em adição aos pressupostos contidos em Γ, supormos a verdade de α e a partir disso pudermos chegar a um absurdo do tipo β e $\neg\beta$, podemos concluir que α é falso. Intimamente associados a estes dois últimos princípios temos o chamado *princípio da explosão*: $\Gamma \cup \{\beta, \neg\beta\} \vdash \alpha$, para todo e qualquer $\alpha \in L$, isto é, que de uma contradição do tipo $\{\beta, \neg\beta\}$ podemos concluir toda e qualquer fórmula.

Obviamente que esta relação $\vdash$ deve ser rigorosamente definida ou construída através de estipulações conceituais. A descrição das propriedades que fizemos acima pressupõe tal definição, e na verdade deve seguir como uma conseqüência desta definição. Por exemplo, apesar de sabermos intuitivamente onde aplicar a relação > de forma a dizer se, dados dois números naturais quaisquer x e y, x>y, em termos matemáticos temos que definir formalmente essa relação. Isso pode ser feito da seguinte forma:

1. Seja $x \in \mathbb{N}$ um número natural qualquer tal que $x \neq 0$. $x > 0$;
2. Não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $0 > x$;
3. Sejam $x, y \in \mathbb{N}$ dois números naturais quaisquer. $x > y$ se e somente se $(x-1) > (y-1)$.

E toda e qualquer propriedade de >, tal como sua transitividade, deve seguir, e conseqüentemente poder ser demonstrada, a partir da definição acima.

Assim, um sistema lógico, principalmente se entendido como uma teoria da inferência, pode ser visto como uma série de definições, em um certo sentido mais complexas do que a definição acima, que juntas teriam o papel de 'construir' a relação de dedução $\vdash$, de forma semelhante a como a relação > é construída na definição acima. Ou em outras palavras, um sistema lógico nada mais é do que uma definição rigorosa da relação de conseqüência lógica $\vdash$. E, conforme já falamos, todas as propriedades de $\vdash$ devem seguir estritamente desta definição, sendo um dos principais trabalhos do lógico demonstrar que tais propriedades realmente valem no seu sistema lógico.

Um ponto importante é que até agora temos falado como se houvesse apenas uma relação de dedução ou noção de validade dedutiva. Falamos, por exemplo, que é tarefa da lógica distinguir argumentos válidos de argumentos inválidos, o que pressupõe obviamente que haja uma maneira única de fazer tal distinção e, portanto, uma relação única de conseqüência lógica. Lembremos, no entanto, que para realmente identificarmos univocamente $\vdash$ temos que dizer qual a linguagem a qual os enunciados que $\vdash$ associará pertencem. Assim, da mesma forma que a relação "maior que" aplicada a conjuntos diferentes resulta em relações diferentes, também $\vdash$ usada em conjunto com linguagens diferentes resultará em relações de inferência diferentes. Assim, para realmente dizermos que relação de inferência $\vdash$ designa temos que mencionar também qual a linguagem sobre a qual $\vdash$ é definida. (É claro que, como para definirmos uma relação de dedução específica $\vdash$ temos que definir previamente a linguagem sobre a qual a relação operará, podemos dizer que a linguagem L associada a $\vdash$ já está, pelo menos implicitamente, contida em $\vdash$.) Por conta disso, tradicionalmente identifica-se um sistema lógico como sendo caracterizado não só por uma relação de inferência, mas também por uma linguagem lógica. Em outras palavras, um *sistema lógico* S pode ser identificado como um par $<L, \vdash>$, onde L é uma linguagem e $\vdash$ é uma relação entre subconjuntos de L e elementos de L chamada relação de relação de inferência lógica. Vale a pena observar que o que chamamos de aspecto representacional e aspecto inferencial da lógica se encontram explícitos na própria caracterização de um sistema lógico.

A implicação óbvia disso é que muito provavelmente haverá uma multiplicidade de sistemas lógicos. A linguagem natural é extremamente variada no que se refere à estrutura de seus enunciados, de forma que se quisermos tratar tal variedade estrutural de forma especializada, isto é, abordando cada aspecto separadamente, teremos inevitavelmente uma pluralidade de linguagens lógicas, e conseqüentemente uma pluralidade de relações de inferências e sistemas lógicos. Por exemplo, se decidirmos tratar enunciados como entidades indivisíveis, não analisando os seus componentes constituintes, mais ou menos como fizemos na análise dos argumentos (12) e (13), teremos a chamada *linguagem proposicional*, que é a linguagem lógica de um dos sistemas lógicos mais conhecidos: a chamada *Lógica Proposicional*. Se por outro lado decidirmos detalhar os componentes de um enunciado, tais como seu sujeito e predicado bem como seu aspecto universal (quando houver), mais ou menos como fizemos nos argumentos (11) e (14), teremos uma *linguagem de primeira ordem*, que é a linguagem usada pelo sistema lógico conhecido como *Lógica de Primeira Ordem*. Similarmente, se decidirmos tratar modalidades como "é necessário que", "é moralmente obrigatório que" e "será o caso que", por exemplo, teremos linguagens lógicas diferentes que darão origem a sistemas lógicos capazes de lidar com enunciados contendo tais construções lingüísticas, nos casos mencionados a Lógica Modal Alética, a Lógica Deôntica e a Lógica Temporal.

Algo digno de nota é que pode acontecer de dois sistemas lógicos $S_1 = <L_1, \vdash_1>$ e $S_1 = <L_2, \vdash_2>$ serem tais que L_1 é diferente de L_2 (e conseqüentemente, sob um ponto de vista rigoroso, $\vdash_1$ é diferente de $\vdash_2$) mas ainda assim, em um sentido muito importante, $\vdash_1$ ser igual a $\vdash_2$, pois ambos compartilham propriedades formais independentes dos aspectos específicos que tornam L_1 e L_2 diferentes uma da outra. Tome a Lógica Proposicional S_p e a Lógica de Primeira Ordem S_{1° como exemplo. Apesar de as linguagens destes dois sistemas serem diferentes, suas relações de inferência satisfazem todas aquelas propriedades consideradas importantes na caracterização de uma relação de inferência, entre elas as mencionadas alguns parágrafos acima. Assim, podemos dizer que S_p e S_{1° possuem a mesma relação de inferência, porém linguagens diferentes, o que podemos representar por $S_p = <L_p, \vdash_c>$ e $S_{1^\circ} = <L_{1^\circ}, \vdash_c>$, onde L_p e L_{1° são as linguagens de S_p e $S_{1,}$ respectivamente, e $\vdash_c$ é o que chamamos de *relação de inferência clássica*, que seria a relação de inferência de ambos os sistemas S_p e $S_{1.}$ O mesmo se aplica a muitos outros sistemas lógicos tais como a Lógica Modal, a Lógica Deôntica e a Lógica Temporal, que possuem linguagens diferentes da linguagem proposicional e da linguagem de primeira ordem, mas cujas relações de inferência possuem as mesmas características de $\vdash_c$.

Mas obviamente não é só em relação à linguagem lógica que dois sistemas lógicos podem diferir um do outro. Mais especificamente, se um sistema lógico S é caracterizado como um par $<L, \vdash>$ então dois sistemas lógicos $S_1 = <L_1, \vdash_1>$ e $S_2 = <L_2, \vdash_2>$ podem diferir um do outro em no mínimo três aspectos fundamentais: pode ser que (1) $\vdash_1$ seja igual a $\vdash_2$ mas L_1 seja diferente de L_2, que foi o caso visto até agora; pode ser que (2) L_1 seja igual a L_2 mas $\vdash_1$ seja diferente de $\vdash_2$; e, finalmente, pode ser que (3) tanto L_1 seja diferente de L_2 como $\vdash_1$ seja diferente de $\vdash_2$. Podemos chamar a classe de sistemas que inclui a Lógica Proposicional e todos os sistemas lógicos que diferem dela de acordo com (1) de *Lógica Clássica* ou *Lógicas Clássicas*. À classe dos que diferem da Lógica Proposicional de acordo com (2) ou (3) podemos dar o nome de *Lógicas Não-Clássicas*. Equivalentemente, tomando a relação de inferência clássica $\vdash_c$ como parâmetro, dizemos que a Lógica Clássica é a classe de todos os sistemas lógicos da forma $S = \langle L, \vdash_c \rangle$, e as Lógicas Não-Clássicas são os sistemas lógicos da forma $S = \langle L, \vdash_{nc} \rangle$, onde $\vdash_{nc}$ é diferente de $\vdash_c$. (Algumas pessoas alternativamente usam o termo "Lógica Clássica" para designar apenas as Lógicas Proposicional e de Primeira Ordem, e o termo "Lógicas Não-Clássicas" para referenciar todos os demais sistemas lógicos.)

Exemplos de lógicas não-clássicas são os sistemas lógicos, por exemplo, onde o princípio do terceiro excluído não é válido. Em tais lógicas, geralmente chamadas de *lógicas paracompletas*, não é o caso que $\Gamma \vdash \alpha \vee \neg\alpha$, onde $\vdash$ é a relação de inferência de tais sistemas. Outro exemplo é as *lógicas paraconsistentes*, onde o princípio da explosão não é valido. Em outras palavras, não é o caso nestas lógicas que $\Gamma \cup \{\beta, \neg\beta\} \vdash \alpha$, para todo $\alpha \in L$, isto é, pode haver enunciados da linguagem lógica que não são deduzidos a partir de uma contradição. Nestas lógicas também não vale o principio da redução ao absurdo (se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$, então $\Gamma \vdash \neg\alpha$) e em muitas delas também o princípio da não-contradição ($\Gamma \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$) não é satisfeito.

Dois pontos devem ser mencionados antes de terminarmos este artigo. Primeiro um esclarecimento em relação ao uso da palavra "lógica". Conforme o leitor deve ter observado, também usamos este termo nesta seção para designar um sistema lógico específico ou uma classe de sistemas lógicos. Assim falamos, por exemplo, em Lógica Proposicional ou Lógica de Primeira Ordem para designar um sistema lógico específico, e em Lógica Modal ou Lógica Clássica, para designar uma classe de sistemas lógicos. Assim temos o termo "lógica" se referindo tanto à *disciplina* incumbida de desenvolver e estudar sistemas lógicos, como aos próprios sistemas lógicos.

Segundo, existem grosso modo duas maneiras distintas de se definir a relação de inferência de um sistema lógico: *semanticamente* ou *sintaticamente*. Grosso modo, a distinção é que, enquanto a definição semântica faz uso de conceitos semânticos como o conceito de verdade e em última instância atenta para o significado dos símbolos, em uma abordagem sintática nenhuma consideração é feita sobre o significado dos termos, enfocando-se exclusivamente a forma lógica dos enunciados. Por fazer referência ao significado dos símbolos, uma definição semântica é mais intuitiva, no sentido de que o fato de tal definição ser ou não uma construção do que entendemos como sendo a relação de conseqüência lógica ser mais facilmente identificável. Por outro lado, no uso efetivo da relação de inferência na avaliação de argumentos, uma definição sintática é mais eficiente. Assim, tradicionalmente a relação de inferência de um sistema lógico é definida tanto sintática como semanticamente. E para distinguir uma da outra, usa-se tanto uma nomenclatura como uma simbologia especial. Para a relação de inferência definida sintaticamente reservamos o termo "relação de dedução", sendo o símbolo $\vdash$ usado agora exclusivamente para designar tal relação. Para a relação de inferência definida semanticamente reservamos o termo "relação de conseqüência lógica", sendo usado um novo símbolo para designar tal relação: $\vDash$.

Dado isso, uma maneira mais correta de caracterizar um sistema lógico seria identificá-lo como um tripla $\langle L, \vdash, \vDash \rangle$, onde L é sua linguagem lógica, $\vdash$ sua relação de inferência definida sintaticamente e $\vDash$ a mesma relação definida semanticamente. A parte do sistema incumbida em definir $\vdash$ nós chamamos de o *cálculo* do sistema. É assim que falamos, por exemplo, no cálculo proposicional e no cálculo de primeira ordem, significando com isto a definição sintática da relação de inferência da Lógica Proposicional e da

Lógica de Primeira Ordem, respectivamente. Há maneiras diferentes de definir sintaticamente uma relação de inferência. Pode-se ter, por exemplo, um *cálculo axiomático*, isto é, um cálculo que é definido de acordo com o chamado método axiomático, um cálculo de *dedução natural* ou um *cálculo de seqüente*. A parte incumbida de definir $\vDash$ nós chamamos simplesmente de a *semântica* da lógica. Mas poderíamos perguntar: como saber se $\vdash$ e $\vDash$ definem realmente a *mesma coisa*? Para isso, as nossas duas relações de inferência devem possuir as seguintes propriedades: dado um conjunto de fórmulas $\Gamma \in L$ e uma fórmula $\alpha \in L$, (1) se $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \vDash \alpha$, e (2) se $\Gamma \vDash \alpha$ então $\Gamma \vdash \alpha$. Em outras palavras, deve ser o caso que se $< L, \alpha>$ é um argumento válido de acordo com a relação de inferência sintática $\vdash$, ele também deve ser de acordo com a relação semântica $\vDash$, e se $< L, \alpha>$ é um argumento válido de acordo com $\vdash$, ele também deve ser de acordo com $\vDash$. Chamamos (1) de a *corretude* do sistema lógico em questão, e (2) de sua *completude*.